

WAHRSCHEINLICHKEIT – INFORMATION - ENTROPIE

Ruprecht-Karls Universität
Philosophisches Seminar
Sommersemester 2012/13
Hauptseminar: Physikalische und mögliche Welten
Seminarleiter: Prof. Dr. Koch, Prof. Dr. Pirner
Referent: Willi Schwarz
Datum: 24.05.2013

Gliederung

- ▶ Wahrscheinlichkeit
- ▶ Zufallsvariable, Mittelwert, Standardabweichung
- ▶ Verteilungsfunktion - Normalverteilung
- ▶ Zentraler Grenzwertsatz
- ▶ Information und Entropie

Wahrscheinlichkeit

- ▶ Beispiel: Münze, Würfel

$$\Omega = \{W, Z\} = \{0, 1\}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ω Ereignismenge; Grundgesamtheit



- ▶ Wie groß ist die Chance „Zahl“ zu werfen, oder eine „6“ zu würfeln?

- ▶ A-priori Wahrscheinlichkeit

Münze $P(Z) = 1/2$ Würfel $P(6) = 1/6$

- ▶ Empirische Wahrscheinlichkeit

Münze $P_e(Z) = \# Z/N$ Würfel $P_e(6) = \# 6/N$ $N = \# \text{ Würfe}$

- ▶ Münze, Würfel fair

$$\Rightarrow P(Z) = P_e(Z) \quad P(6) = P_e(6) \quad (N \rightarrow \infty)$$

Wahrscheinlichkeit

- ▶ Axiomatische Wahrscheinlichkeit (Kolmogoroff)

Ω , P Wahrscheinlichkeitsmaß

$0 \leq P(A) \leq 1$, für das Ereignis A , $A \subseteq \Omega$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A \cap B = \emptyset$

- ▶ Grundgesamtheit

Ω (endlich, abzählbar) – Münze, Würfel

$\Omega = \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

$\mathcal{F}$ Teilmengen von Ω , für die P berechnet werden kann

Zufallsvariable, Mittelwert, Standardabweichung

- ▶ Zufallsvariable – misst Merkmal

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad X : e \rightarrow x \in \mathbb{R} \quad X(e) \text{ Ausprägung}$$

- ▶ Würfel

X: z.B. gewürfelte Augenzahl, 2-fache der Augenzahl

Ω Bundesbürger

- ▶ X: z.B. Alter, Einkommen, Körpergröße einer Person

- ▶ Erwartungswert , Mittelwert, Standardabweichung (E, μ, σ)

Würfel

$$E = \mu = \sum_{e \in \Omega} p(e) X(e) = 1/6 (1+2+3+4+5+6) = 3,5$$

$$\sigma = 1/6 \sqrt{((1-\mu)^2 + (2-\mu)^2 + \dots + (6-\mu)^2)} \approx 1,078$$

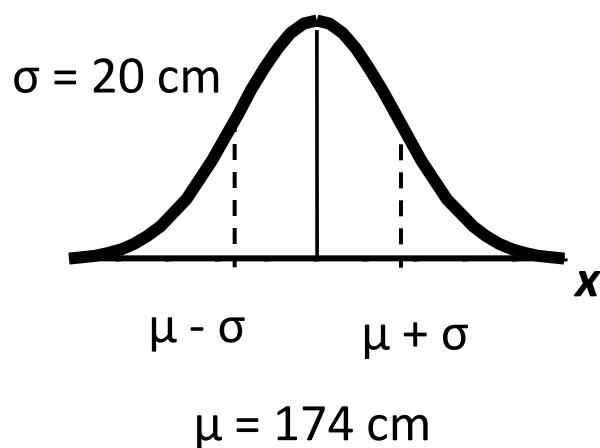
Verteilungsfunktion - Normalverteilung

- ▶ Zufallsvariable – misst Merkmal der Grundgesamtheit

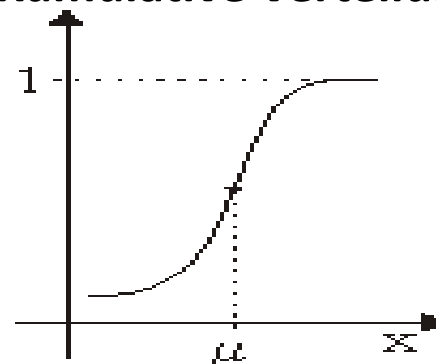
$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad X : e \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Ω Bundesbürger, $X(e)$ = Körpergröße einer Person

Normalverteilung

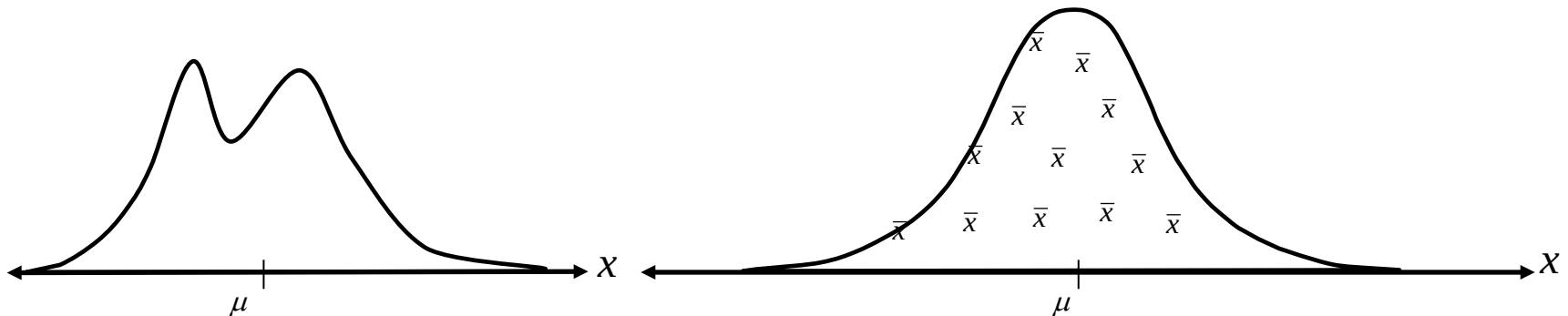


Kumulative Verteilung



Zentraler Grenzwertsatz

- ▶ Ω Grundgesamtheit, μ, σ
Ziehe Stichproben mit gleichem Umfang (≥ 30) – berechne $\bar{x}$
- ▶ Stichproben **identisch unabhängig gleichverteilt** (iid)



- ▶ $\Rightarrow$ Verteilungsfunktion der Stichprobenmittel ist näherungsweise eine Normalverteilung

Information – Entropie

▶ Münze $\Omega = \{0, 1\}$, $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$

▶ Informationsgehalt des Ereignisses 0 bzw. 1

$$I(p(0)) = -\log_2 p(0) = -\log_2 (1/2) = 1, \quad I(p(1)) = 1 \quad (\text{bit})$$

▶ Entropie ist der Erwartungswert des Informationsgehalts

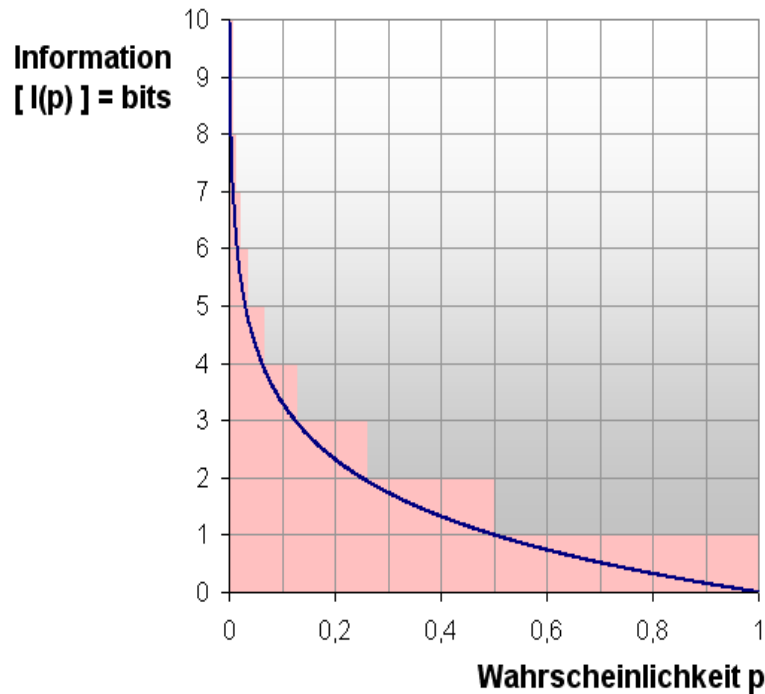
$$H = -p(0) I(p(0)) - p(1) I(p(1)) = 1 \quad (\text{bit / Zeichen})$$

▶ „gezinkte“ Münze $p(0) = 2/5$, $p(1) = 3/5$

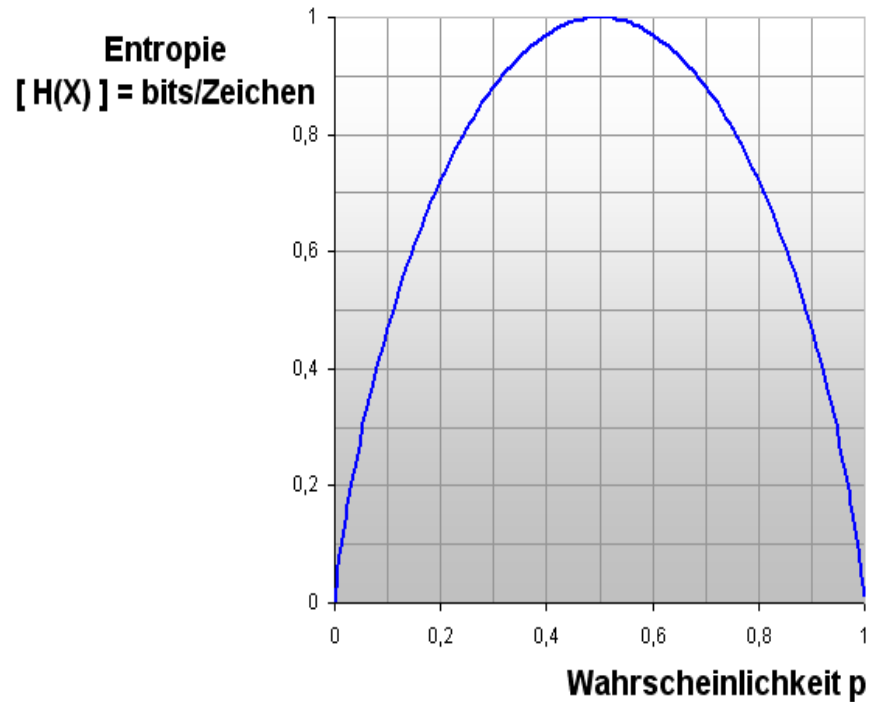
$$H \approx 0,971$$

Information - Entropie

Informationsgehalt eines Zeichens
mit Auftretswahrscheinlichkeit p



Zwei Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit p und $(1-p)$



Quelle: Wikipedia

Information - Entropie

- ▶ Information

- ▶ Beseitigte Unsicherheit
- ▶ Mehr empfangene Zeichen senken die Unsicherheit
- ▶ Gleichwahrscheinliche Zeichen
Unterscheidung durch $-\log_2 p(e)$ Bits

- ▶ Entropie

- ▶ Gewichtung des Informationsgehalts des von Zeichen mit der Eintrittswahrscheinlichkeit
- ▶ Mittlerer oder erwarteter Informationsgehalt