Die allgemeine Relativität

Hans J. Pirner

5. Juli

Inhalt:

- (A) Geometrie nach der Entdeckung Amerikas
- (B1) Bewegungsgleichungen
- (B2) Das Äquivalenzprinzip
- (B3) Schwache Gravitationsfelder
- (C) Krümmung des Raumes wird durch die Masse und den Impuls von Strahlung und Materie bestimmt

(A) Geometrie

- Flacher Raum:
- Pythagoras: $ds^2= dx^2+dy^2+dz^2$
- Kürzeste Verbindung zweier Punkte= Gerade (Die Welt von Kant in Königsberg)
- Gekrümmter Raum:
- z. B. Oberfläche unserer Erde:
- R, Breitengrad φ, Längengrad θ
- $ds^2=R^2\, d\,\theta^2+ R^2 \sin \theta^2\, d\,\varphi^2$

Nicht Euklidische Geometrie nach der Entdeckung Amerikas

- Kürzeste Verbindung zweier Punkte z.b. Frankfurt und New York ist Großkreis

  Bezeichnung: geodätische Linien oder kurz „Geodäten“
- Piloten und Seefahrer leben in dieser Nicht-Euklidischen Welt , d.h. unser Selbstverständnis in Raum und Zeit wird durch die Naturwissenschaft verändert-

Geometrie der Raum-Zeit

- Aus der speziellen Relativität ist bekannt:
- $c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

  definiert die Eigenzeit τ und den Abstand

  zwischen zwei Raum-Zeit Punkten.
- Lichtstrahlen mit $ds^2=0$ geben den kürzesten Abstand
- $ds^2 = \sum g_{\mu,\nu}\, x^\mu x^\nu$
- $x^\mu = (ct, x, y, z)$ Raum-Zeit Ereignisse

(B1) Bewegung in gekrümmten Räumen

- Die Kräfte freie Bewegung eines Teilchens wird bei Newton dadurch charakterisiert, dass sich Richtung und Betrag der Geschwindigkeit nicht ändern.

- Aber was bedeutet Richtung in gekrümmten Räumen? Wann sind zwei Richtungen parallel?

Parallelverschiebung auf der Erdkugel:

- (a) Verschiebe Vektor V tangential zu einem Meridian vom Nordpol zum Südpol, erhalte den Vektor V1 .
- (b) Verschiebe den gleichen Vektor V senkrecht zu einem anderen Meridian , wir erhalten V2
- V2=-V1, Paralleltransport ist wegabhängig
- Der Paralleltransport wird beschrieben durch ein Verbindungsfeld Γ , welches erste Ableitungen
- der Metrik g enthält

Bewegungsgleichungen im kräftefreien Fall

- Klassisch: d^2x/ dt^2= 0
- x(t)= (x,y,z)-→Lösung Gerade
- Spezielle Relativität:
- d^2 x^mu/d^2τ^2= 0
- x^mu=(ct,x,y,z) ; τ=Eigenzeit; Lösung Lichtkegel
- Im gekrümmten Raum:
- d^2 x^mu/d^2τ
- + Γ ^mu_s t d x^s/dτ d x^t/dτ = 0
- der zweite Teil (Γ…)schaut wie eine externe Kraft aus! Lösung Geodätische Linie

(B2) Äquivalenzprinzip

- Objekte verhalten sich gleich, unabhängig ob sie in einem Gravitationsfeld oder einer lokalen Beschleunigung ausgesetzt sind

  Beispiel: Beschleunigtes Raumschiff im Gravitationsfreien Raum simuliert Gravitationskraft

- Aber es gibt kein globales Koordinatensystem welches ein inhomogenes Gravitationsfeld (z.B. der Erde) ersetzt. Koordinatensystem muss von der Massenverteilung abhängen. Geodäten verändern sich lokal, Krümmung → Masse

(B3) Für schwache Gravitationsfelder:

- Man kann sehen wie Γ oder g aussehen muss für schwache Gravitationsfelder:
- d τ ≈ dt
- d^2x/dt^2+ c^2 Γ (dx^0/dt)^2=0
- Mit Γ =1/2 grad g_00= grad GM/r
- Folgt g_00= 1- 2G M/c^2 1/r für r>R
- Das Gravitationspotential zeigt sich durch eine Krümmung des Raumes

(C) Einstein Gleichung

- Krümmung des Raums = bestimmt durch Energie und Impulsverteilung der Materie und Strahlung im Raum
- Empirische Tests:
- Rotverschiebung
- Lichtablenkung
- Periheldrehung der Planeten (Merkur)
- Kosmologie