J

Zusammenfassung und Ergänzung zur speziellen Relativitätstheorie

Summary and Supplement to the Special Theory of Relativivity

Ich beginne die Vorlesung über allgemeine Relativitätstheorie mit einer Zusammenfassung der speziellen Relativitätstheorie, aber auch mit einigen Ergänzungen, vor allem zum Energie-Impuls-Tensor, der in der allgemeinen Relativitätstheorie eine zentrale Rolle spielt.

I begin the lecture on the general theory of relativity with a summary of the special theory of relativity, but also with some extensions concerning the energy-momentum tensor which plays a central role in general relativity.

31 MINKOWSKI-Raum

31 MINKOWSKI space

31.a Metrischer Tensor

31.a Metric Tensor

Ausgangspunkt der Relativitätstheorie ist die Konstanz der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c. Wird daher zur Zeit $t = 0$ ein Lichtblitz am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ erzeugt, so wird seine Wellenfront durch

Starting point of the theory of relativity is the constance of the (vacuum) velocity of light c. If a light-flash is generated at time $t = 0$ at point $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, then its wave front is described by

$$s^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2 = 0 \tag{31.1}$$

beschrieben. Es ist nun bequem, die Orts- und Zeitkoordinaten zusammenzufassen und mit

. It is now practical to combine the space and time coordinates and to denote them by

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{31.2}$$

zu bezeichnen. Dann lautet obiger Ausdruck

. Then the expression above reads

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0. \tag{31.3}$$

(Man verwechsle nicht obere Indices und Exponenten). Dieser Ausdruck lässt sich auch

(Do not mix up upper indices and exponents). This expression may also be written

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{31.4}$$

schreiben, wobei wir die E sche Summenkonvention verwenden: Wann immer in einem Produkt der gleiche obere und untere Index auftaucht, ist über diesen zu summieren, hier also über μ und ν. Dabei bezeichnet man

where we use E 's summation convention: Whenever in a product the same upper and lower index appears then one has to sum over these indices, thus here over μ and ν. One calls

$$\eta_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{31.5}$$

als den metrischen Tensor. Ein Raum mit dieser Metrik wird M -Raum genannt.

the metric tensor. A space with this metrics is called M space.

Die x^μ sind die Komponenten des vierdimensionalen Orts-Vektors, wobei natürlich die Zeit als Komponente des Vektors mitgezählt wird. Neben diesen kontravarianten Komponenten führt man auch kovariante Komponenten

The x^μ are the components of the four-dimensional position vector where time is also counted as one component of the vector. One introduces covariant components besides these contravariant components

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \tag{31.6}$$

ein. Offensichtlich ist

. Obviously one has

$$x_0 = x^0 = ct, \quad x_1 = -x^1 = -x, \quad x_2 = -x^2 = -y, \quad x_3 = -x^3 = -z. \tag{31.7}$$

Man fasst auch häufig

One often combines

$$(x^\mu) = (ct, \mathbf{r}), \quad (x_\mu) = (ct, -\mathbf{r}) \tag{31.8}$$

zusammen. Damit können wir das Intervall s^2 auch ausdrücken als

. Then the interval s^2 can also be expressed as

$$s^2 = x^\mu x_\mu. \tag{31.9}$$

Genauso wie man die kovarianten durch die kontravarianten Komponenten ausdrückt, drückt man auch die kontravarianten durch die kovarianten Komponenten aus

In the same way we may express the covariant components by the contravariant components it is possible to express the contravariant components by the covariant ones

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \tag{31.10}$$

Die Matrix $\eta^{\cdot\cdot}$ ist offensichtlich die Inverse von $\eta_{\cdot\cdot}$, was sich identisch mit (31.5) herausstellt.
Generell gilt für das Herauf- und Herunter-Ziehen von Indices

Obviously the matrix $\eta^{\cdot\cdot}$ is the inverse of $\eta_{\cdot\cdot}$, and turns out to be identical with (31.5).
Generally one has for the lifting and lowering of indices

$$C \cdot {}^{\cdot\mu} \cdot \cdot = \eta^{\mu\nu} C \cdot {}_{\cdot\nu} \cdot \cdot, \quad C \cdot {}_{\cdot\mu} \cdot \cdot = \eta_{\mu\nu} C \cdot {}^{\cdot\nu} \cdot \cdot \tag{31.11}$$

Wir vereinbaren: Indices $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ laufen von 0 bis 3, Indices α, β, γ, ... von 1 bis 3. Man beobachtet, dass nach (31.11) $\eta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\kappa}\eta^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $\eta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ mit dem K -Delta ist.

We introduce the convention: Indices κ, λ, μ, ν run from 0 to 3, indices α, β, γ, ... from 1 to 3. One observes that according to (31.11) $\eta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\kappa}\eta^{\kappa\nu} = \delta_\mu{}^\nu$, $\eta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ with the K delta.

31.b Lorentz-Transformation

31.b Lorentz Transformation

Die Beziehung $s^2 = x^\mu x_\mu = 0$ in einem System S gilt natürlich entsprechend auch für ein gleichförmig bewegtes System S', dessen Ursprung für $t = t' = 0$ mit dem von S übereinstimmt

Of course, the relation $s^2 = x^\mu x_\mu = 0$ in a system S holds also for a uniformly moving system S' whose origin agrees at $t = t' = 0$ with that of S

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = 0. \tag{31.12}$$

Unter der Annahme eines homogenen Raum-Zeit-Kontinuums muss die Transformation zwischen x' und x linear sein

Assuming a homogeneous space-time continuum the transformation between x' and x has to be linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{31.13}$$

und es muss $s'^2 = fs^2$ mit einer Konstanten f gelten. Verlangen wir, dass der Raum isotrop und kein Inertialsystem ausgezeichnet ist, so folgt $f = 1$. Die Bedingung $s'^2 = s^2$ impliziert

and $s'^2 = fs^2$ has to hold with some constant f. If we require that space is isotropic and no system of inertia is preferred, then $f = 1$ has to hold. The condition $s'^2 = s^2$ implies

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\kappa x_\kappa = s^2 = x^\nu \delta_\nu{}^\kappa x_\kappa, \tag{31.14}$$

was für beliebiges x erfüllt ist, wenn

which is fulfilled for arbitrary x, if

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa \tag{31.15}$$

gilt. Die Transformation (31.13) mit der Bedingung (31.15) heißt L -Transformation. Die Umkehrtransformation von (31.13) folgt aus

holds. The transformation (31.13) with the condition (31.15) is called L transformation. The inverse transformation of (31.13) follows from

$$x^\kappa = \delta_\nu{}^\kappa x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda_\mu{}^\kappa x'^\mu. \tag{31.16}$$

Die spezielle Lorentz-Transformation, die x und y invariant lässt, und zwei Inertialsysteme miteinander verknüpft, deren Relativ-Geschwindigkeit v ist,

The special L transformation which leaves x and y invariant and connects two systems of inertia with relative velocity v,

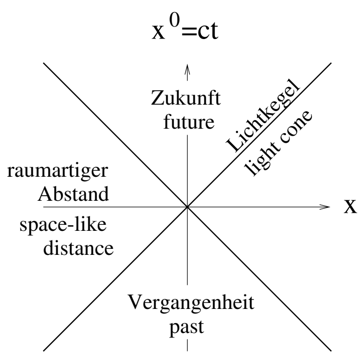
$$z' = \gamma(z - vt), \quad t' = \gamma(t - \frac{vz}{c^2}), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{31.17}$$

wird dargestellt durch

is represented by

$$\Lambda^{\cdot}{}_{\cdot} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{31.18}$$

Da s^2 invariant ist, stimmt es in allen Inertialsystemen überein. Es beschreibt das Intervall zwischen zwei Ereignissen, das heißt zwischen zwei Ort-Zeit-Punkten, hier bei $(0, \mathbf{0})$ und $(t, \mathbf{r})$. Natürlich kann man s^2 auch für zwei beliebige Ereignisse bei $(t, \mathbf{r})$ und $(\bar{t}, \bar{\mathbf{r}})$ einführen



Since s^2 is invariant it coincides in all systems of inertia. It describes the interval between two events, that is between two space-time points, here at $(0, \mathbf{0})$ and $(t, \mathbf{r})$. Of course, one can also introduce s^2 for two arbitrary events at $(t, \mathbf{r})$ and $(\bar{t}, \bar{\mathbf{r}})$

$$s^2 = (\bar{x}^\mu - x^\mu)(\bar{x}_\mu - x_\mu). \tag{31.19}$$

Ist $s^2 = 0$, so bezeichnet man den Abstand als lichtartig, da ein Lichtblitz von einem Ereignis aus beim anderen ankommt. Man kann zwischen dem früheren und dem späteren Ereignis unterscheiden.

For $s^2 = 0$ the distance is called light-like, since a light-flash arrives from one event at the other one. One can distinguish between the earlier and the later event .

Ist $s^2 > 0$, so bezeichnet man den Abstand als zeitartig. Es gibt dann ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort, aber zu einer Zeitdifferenz

In case $s^2 > 0$ the distance is called time-like. Then there is a system of inertia in which both events take place at the same place but at times differing by

$$\Delta t = \frac{\sqrt{s^2}}{c} \tag{31.20}$$

stattfinden. Hat sich ein Punkt gleichförmig von einem Ereignis zum anderen bewegt, so ist die Zeit, die ein Beobachter misst, der sich mit dem Punkt bewegt, die Eigenzeit $\tau = \frac{\sqrt{s^2}}{c}$. Auch hier kann man zwischen dem späteren und dem früheren Ereignis unterscheiden. Generell gilt für die Eigenzeit

. If a point moves uniformly from one event to the other then the time measured by an observer moving with the point is the proper time $\tau = \frac{\sqrt{s^2}}{c}$. Also here one can distinguish between the later and the earlier event. Generally one has for the proper time

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{(ds)^2} = \sqrt{(dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\mathbf{r})^2} = dt\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \tag{31.21}$$

Ist $s^2 < 0$, so bezeichnet man den Abstand als raumartig. Es gibt dann ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden. In diesem Inertialsystem ist der Abstand der beiden Ereignisse durch $\sqrt{-s^2}$ gegeben. Man kann nicht zwischen früherem und späterem Ereignis unterscheiden.

For $s^2 < 0$ the distance is called space-like. There is a system of inertia in which both events take place at the same time. In this system of inertia the distance of both events is given by $\sqrt{-s^2}$. One cannot distinguish between an earlier and a later event.

Wir haben die kovarianten und kontravarianten Komponenten der vierdimensionalen Ortsvektoren eingeführt. Tatsächlich kann man solche Vektoren durch Definition einer entsprechenden Basis einführen und

We have introduced the covariant and contravariant components of the four-dimensional position vectors. Indeed, one can introduce such vectors by defining an appropriate basis and expand

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x_\mu \mathbf{e}^\mu \tag{31.22}$$

entwickeln. Der Vektor $\mathbf{x}$ ist unabhängig von dem jeweiligen Inertialsystem, aber die $\mathbf{e}_\mu$ und $\mathbf{e}^\mu$ hängen vom jeweiligen Inertialsystem ab. Definieren wir

. The vector $\mathbf{x}$ is independent of the respective system of inertia, but the basis vectors $\mathbf{e}_\mu$ und $\mathbf{e}^\mu$ depend on the system of inertia. If we define

$$s^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}), \tag{31.23}$$

so folgt

then we obtain

$$(\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu, \quad (\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) = \eta^{\mu\nu}, \quad (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}. \tag{31.24}$$

Aus (31.15) folgt speziell für $\nu = \kappa = 0$ die Beziehung $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Man beachte, dass $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Daher ist $|\Lambda^{00}| \geq 1$. Man unterscheidet zwischen Transformationen mit positivem und negativem Λ^{00}, da es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen diesen beiden Klassen gibt. Die Bedingung $\Lambda^{00} > 0$ sagt aus, dass $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, das heißt eine in S' ruhende Uhr läuft von S aus gesehen in der gleichen Zeitrichtung, wie die in S synchronisierten Uhren (und nicht rückwärts).

From (31.15) one obtains in particular for $\nu = \kappa = 0$ the relation $(\Lambda^{00})^2 - \sum_\alpha (\Lambda^{\alpha 0})^2 = 1$. Note that $\Lambda^\alpha{}_0 = +\Lambda^{\alpha 0}$, $\Lambda_\alpha{}^0 = -\Lambda^{\alpha 0}$. Thus one has $|\Lambda^{00}| \geq 1$. One distinguishes between transformations with positive and negative Λ^{00}, since there is no continuous transition between these two classes. The condition $\Lambda^{00} > 0$ means that $\Lambda^{00} = \frac{dt}{dt'}|_{\mathbf{r}'} > 0$, that is a clock which is at rest in S' changes its time seen from S in the same direction as the clock at rest in S (and not backwards).

Schließlich lässt sich noch eine Aussage über $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$ machen. Aus (31.15) folgt

Finally we can make a statement on $\det(\Lambda^\mu{}_\nu)$. From (31.15) it follows that

$$\Lambda^\mu{}_\nu \eta_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda{}_\rho \eta^{\rho\kappa} = \delta_\nu{}^\kappa. \tag{31.25}$$

Unter Verwendung des Determinanten-Multiplikationssatzes folgt

Using the theorem on the multiplication of determinants we obtain

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu)^2 \det(\eta_{\mu\lambda}) \det(\eta^{\rho\kappa}) = 1. \tag{31.26}$$

Da $\det(\eta_{\mu\lambda}) = \det(\eta^{\rho\kappa}) = -1$ folgt

Since $\det(\eta_{\mu\lambda}) = \det(\eta^{\rho\kappa}) = -1$ one obtains

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1. \tag{31.27}$$

Betrachten wir nur Rechts-Basis-Systeme, so ist $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = +1$. Transformationen, die

If we consider only a right-basis-system then we have $\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = +1$. Transformations which fulfill

$$\Lambda^{00} > 0, \quad \det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = 1 \tag{31.28}$$

erfüllen, heißen eigentliche L -Transformationen.

are called proper L transformations.

Gl. (31.28) hat die Konsequenz, dass das vierdimensionale Raumzeitvolumen invariant ist

Eq. (31.28) has the consequence that the fourdimensional space time volume is invariant

$$\mathrm{d}t'\mathrm{d}^3r' = \frac{1}{c}\mathrm{d}^4x' = \frac{1}{c}\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\mathrm{d}^4x = \frac{1}{c}\det(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})\mathrm{d}^4x = \frac{1}{c}\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}t\mathrm{d}^3r. \tag{31.29}$$

Grundlage der speziellen Relativitätstheorie ist, dass die Bewegungsgesetze invariant gegen alle L -Transformationen einschließlich Translationen sind

Basis of the special theory of relativity is that the equations of motion are invariant against all L transformations including translations

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a'^{\nu}. \tag{31.30}$$

Diese Transformationen werden P ´-Transformationen genannt.

These transformations are called P ´ transformations.

Aufgabe: Man überzeuge sich, dass die L -Transformationen die Gruppeneigenschaften haben: Zwei aufeinander folgende Transformationen ergeben wieder eine L -Transformation. Zu jeder L -Transformation gibt es ein Inverses. Unter den L -Transformationen ist auch die Identität.

Exercise: Show that the L transformations have group properties: Two consecutive transformations yield again a L transformation. There is an inverse to each L transformation. Among the L transformations there is the identity.

Aufgabe: Welche Form haben infinitesimale L -Transformationen?

Exercise: How do infinitesimal L transformations look like?

Aufgabe: Wie transformieren sich die Basis-Vektoren $\mathbf{e}^{\mu}$ und $\mathbf{e}_{\mu}$?

Exercise: How do the basis vectors $\mathbf{e}^{\mu}$ and $\mathbf{e}_{\mu}$ transform?

32 Massen-Punkte

32 Mass Points

32.a Vierer-Vektoren und Weltgeschwindigkeit

32.a Four-Vectors and World Velocity

Transformiert sich eine vierkomponentige Größe (A^μ) beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen wie die Raum-Zeit-Koordinaten (x^μ), so bildet sie einen Vierervektor

If a four-component quantity (A^μ) transforms by the transition from one system of inertia to another as the space-time coordinates (x^μ), then it is a four-vector

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{32.1}$$

Ein Beispiel ist die Weltgeschwindigkeit eines Massen-Punktes

An example is the world velocity of a mass point

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma v^\mu \quad \text{mit / with} \quad v^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = c. \tag{32.2}$$

Die Weltgeschwindigkeit $(u^\mu) = (c\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ ist ein Vierer-Vektor. Da τ invariant gegen L -Transformationen ist, transformiert sie sich wie (x^μ). Dagegen ist $(c, \mathbf{v})$ kein Vierer-Vektor. Es ist

The world velocity $(u^\mu) = (c\gamma, \mathbf{v}\gamma)$ is a four-vector. Since τ is invariant under L transformations, its components transform like (x^μ). However, $(c, \mathbf{v})$ is not a four-vector. One has

$$u^\mu u_\mu = (c^2 - \mathbf{v}^2)\gamma^2 = c^2. \tag{32.3}$$

Allgemein ist das Skalar-Produkt zweier Vierer-Vektoren (A^μ) und (B^μ) ein Viererskalar

Quite generally the scalar product of two four-vectors (A^μ) and (B^μ) is a four-scalar

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\kappa A^\nu B_\kappa = \delta^\kappa_\nu A^\nu B_\kappa = A^\nu B_\nu. \tag{32.4}$$

Wir zeigen das folgende Lemma: Gilt für alle Vierervektoren (a^μ) oder einen vollständigen Satz von Vierervektoren (a^μ), dass $a^\mu b_\mu$ ein Viererskalar ist (was heißt, dass das Produkt invariant gegen alle L transforamtionen ist), dann ist auch (b^μ) ein Vierervektor. Beweis:

We show the following lemma: If for all four-vectors (a^μ) or a complete set of four-vectors (a^μ) holds that $a^\mu b_\mu$ is a four-scalar (which means that it is invariant against all L transformations) then (b^μ) is a four-vector too. Proof:

$$a^\mu b_\mu = a'^\kappa b'_\kappa = \Lambda^\kappa{}_\mu a^\mu b'_\kappa. \tag{32.5}$$

Da dies für alle (a^μ) oder einen vollständigen Satz gilt, gilt auch $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. Dies ist aber die Transformationsformel (31.16) für Vierervektoren.

Since this holds for all (a^μ) or for a complete set, one has $b_\mu = \Lambda^\kappa{}_\mu b'_\kappa$. This, however, is the transformation formula (31.16) for four-vectors.

32.b Energie und Impuls eines Massenpunkts

32.b Energy and Momentum of a Mass Point

Energie und Impuls eines Massenpunkts der Masse m sind gegeben durch

Energy and momentum of a mass point of mass m are given by

$$(G^\mu) = (\frac{1}{c}E, \mathbf{G}) = (mu^\mu). \tag{32.6}$$

Die Raum- und Zeit-Komponenten stellen sich dar als

The space and temporal components are represented by

$$\mathbf{G} = m\gamma\mathbf{v} = m\mathbf{v}(1 + \frac{v^2}{2c^2} + O(v^4/c^4)), \tag{32.7}$$

$$E = cG^0 = mcu^0 = mc^2\gamma = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + O(v^4/c^2). \tag{32.8}$$

Wir beobachten, dass

We observe that

$$G^\mu G_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2. \tag{32.9}$$

Aus der Energie-Impuls-Beziehung können wir auch auf die L -Funktion eines Massenpunktes schließen. Normalerweise erhält man die H - Funktion $\mathcal{H}$ aus der L -Funktion $\mathcal{L}$. Hier wollen wir den umgekehrten Weg gehen. Die H - -Funktion eines freien Massenpunktes ist gegeben durch

We may conclude from the energy-momentum relation to the L function of a mass point. Normally one obtains the H ian function $\mathcal{H}$ from the L an function $\mathcal{L}$. Here we go the way in the opposite direction. The H ian of a free mass point is given by

$$\mathcal{H} = E(\mathbf{G}) = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{G}^2}. \tag{32.10}$$

Hieraus folgt die L -Funktion

From this one obtains the L an function

$$\mathcal{L} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{v} - \mathcal{H} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{32.11}$$

mit

with

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{G}} = \frac{c\mathbf{G}}{\sqrt{m^2c^2+\mathbf{G}^2}}. \tag{32.12}$$

Die zugehörige Wirkung

The corresponding action

$$I = \int \mathrm{d}t\mathcal{L} = -mc^2\int \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -mc^2\int \mathrm{d}\tau \tag{32.13}$$

ist gerade die Eigenzeit und daher L -invariant. Da wir später auch mit Feldern zu tun haben, ist es zweckmäßig, auf die Dichte L der L - Funktion überzugehen, das heißt die L - Funktion in der Form

is the proper time and thus L invariant. Later we will deal with fields. Therefore it is appropriate to go over to the density L of the L an function, that is to write $\mathcal{L}$ in the form

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^3x L(x,t) \tag{32.14}$$

zu schreiben. Für mehrere Massenpunkt, die wir mit a durchnummerieren, erhalten wir dann

. For several mass points which are numbered by a we obtain

$$L_\mathrm{m} = -\sum_a m_a c^2 \delta_a(x) \tag{32.15}$$

mit

with

$$\delta_a(x) = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t))/\gamma_a. \tag{32.16}$$

Wir beachten, dass δ_a ein Viererskalar ist, da die Eigenzeit, die das Teilchen a in einem Raum-Zeit-Volumen Ω verbringt,

We observe that δ_a is a four-scalar since the proper time the particle a is staying within an space-time volume Ω

$$\tau = \int_\Omega \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}_a^2}{c^2}}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)) \tag{32.17}$$

ein Vierer-Skalar ist und das Gleiche für $\mathrm{d}t\mathrm{d}^3x$ gilt.

is a four-scalar and the same holds for $\mathrm{d}t\mathrm{d}^3x$.

Wir führen die Teilchenstromdichte $\jmath$ ein,

We introduce the particle current density $\jmath$

$$\jmath_{a\mu}(x) = \dot{x}_{a\mu}(t)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)) = u_{a\mu}(t)\delta_a(x). \tag{32.18}$$

Bevor wir die Kontinuitäts-Gleichung für die Teilchendichte herleiten, betrachten wir die Transformations-Eigenschaften der Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$

Before we derive the equation of continuity for the particle density we consider the transformation properties of the derivatives $\partial/\partial x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{32.19}$$

das heisst die Ableitung transformiert sich gemäß

that is the derivatives transform according to

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{32.20}$$

wie $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Man schreibt daher

as $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Thus one writes

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{32.21}$$

Man achte auf die Stellung der Indices. Ähnlich gilt

Watch the positions of the indices. Similarly one has

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad (\partial^\mu) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{32.22}$$

Berücksichtigen wir, dass

If we consider that

$$\rho_a(x) = j_a^0(x)/c = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad t = x^0/c \tag{32.23}$$

dann erhält die Kontinuitätsgleichung

then the equation of continuity

$$\dot{\rho}_a(x) + \operatorname{div} \jmath_a(x) = 0 \tag{32.24}$$

die Form

can be written

$$\partial_\nu j_a^\nu(x) = 0. \tag{32.25}$$

Wir finden nun

We obtain

$$\partial_\nu j_a^\nu(x) = \partial_0(\dot{x}_a^0(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))) + \partial_\alpha(\dot{x}_a^\alpha(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))). \tag{32.26}$$

Beachtet man, dass $\dot{x}_a^0(t) = c\dot{t} = c$ ist, so folgt

Considering that $\dot{x}_a^0(t) = c\dot{t} = c$ holds one obtains

$$\partial_0(\dot{x}_a^0(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))) = \frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = -\dot{x}_a^\alpha\partial_\alpha\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \tag{32.27}$$

da die einzige Zeitabhängigkeit in $\mathbf{r}_a(t)$ steckt. Andererseits hängt x_a^α nur von der Zeit, aber nicht vom Ort $\mathbf{r}$ ab, so dass

since the only time-dependence shows up in $\mathbf{r}_a(t)$. On the other hand x_a^α depends only on time but not on the local position $\mathbf{r}$, so that

$$\partial_\alpha(\dot{x}_a^\alpha\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))) = \dot{x}_a^\alpha\partial_\alpha\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{32.28}$$

gilt. Daher heben sich die Beiträge gegenseitig weg und es folgt

holds. Thus the contributions cancel and one obtains

$$\partial_\nu j_a^\nu(x) = 0. \tag{32.29}$$

Die gesamte Teilchenstromdichte ist dann $\jmath(x) = \sum_a \jmath_a(x)$, die Ladungsstromdichte $j(x) = \sum_a q_a \jmath_a(x)$, die Massenstromdichte $\mu(x) = \sum_a m_a \jmath_a(x)$.

The total particle-current density is $\jmath(x) = \sum_a \jmath_a(x)$, the charge-current density $j(x) = \sum_a q_a \jmath_a(x)$, and the mass-current density $\mu(x) = \sum_a m_a \jmath_a(x)$.

32.c Energie-Impuls-Tensor eines idealen Gases

Für ein ideales Gas, das heißt für Materie oder Strahlung ohne jegliche Wechselwirkung, schreiben wir den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mathrm{m}\mu\nu}(x) = \sum_a m_a u_{a\mu} u_{a\nu} \delta_a(x). \tag{32.30}$$

Wir beobachten, dass

$$T_{\mathrm{m}\mu 0}(x) = \sum_a m_a u_{a\mu} u_{a0} \delta_a(x) = \sum_a G_{a\mu} c \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \tag{32.31}$$

gilt und daher $T_{\mathrm{m}00}$ die Energiedichte und $T_{\mathrm{m}\alpha 0}$ die Komponenten der Impulsdichte multipliziert mit c darstellen.

Wir mitteln nun über ein Volumen, in dem viele Teilchen sind, und gehen in das lokale Ruhesystem über, das heißt in das System, in welchem die mittlere Impulsdichte verschwindet

$$\overline{T_{\mathrm{m}\alpha 0}} = \overline{T_{\mathrm{m}0\alpha}} = 0 \tag{32.32}$$

und bezeichnen die mittlere Energiedichte dieses lokalen Ruhesystems mit $\epsilon(x)$

$$\overline{T_{\mathrm{m}00}(x)} = \overline{\sum_a m_a u_{a0} u_{a0} \delta_a(x)} = \overline{\sum_a m_a c^2 \gamma_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))} = \epsilon(x). \tag{32.33}$$

Wir gehen nun davon aus, dass wir im lokalen Ruhesystem eine isotrope Verteilung der Geschwindigkeiten haben, genauer gesagt, dass in diesem System $\overline{T_{\mathrm{m}\alpha\beta}}$ diagonal sei, und dass die räumlichen Diagonalkomponenten übereinstimmen.

Für die räumlichen Komponente $\overline{T_{\mathrm{m}11}}$ erhält man

$$\overline{T_{\mathrm{m}11}(x)} = \overline{\sum_a m_a u_{a1} u_{a1} \delta_a(x)} = \overline{\sum_a G_{a1} v_{a1} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))} = P(x) \tag{32.34}$$

den Druck P. Greifen wir etwa Teilchen mit Geschwindigkeitskomponente v_1 heraus, die an einer Wand x_1 =const. reflektiert werden, und sei ihre Dichte ρ, so treffen pro Zeiteinheit und Fläche ρv_1 Teilchen auf, die die Impulskomponente $2G_1$ auf die Wand übertragen. Berücksichtigt man, dass sich die gleiche Anzahl in umgekehrter Richtung bewegen, so ergibt sich der Beitrag zum Druck zu $\rho G_1 v_1$, womit obige Beziehung gezeigt ist. Wir haben daher im lokalen Ruhesystem, wobei wir die Mittelungs-Striche weglassen

$$T^0_{\mathrm{m}\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu} P + \delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}(\epsilon + P). \tag{32.35}$$

Dies transformieren wir nun in ein bewegtes System

$$T_{\mathrm{m}\kappa\lambda} = \Lambda_\kappa{}^\mu \Lambda_\lambda{}^\nu T^0_{\mathrm{m}\mu\nu} = -\Lambda_\kappa{}^\mu \Lambda_\lambda{}^\nu \eta_{\mu\nu} P + \Lambda_\kappa{}^\mu \Lambda_\lambda{}^\nu \delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}(\epsilon + P). \tag{32.36}$$

32.c Energy-Momentum Tensor of an Ideal Gas

For an ideal gas that is for matter or radiation without any interaction we write the energy momentum tensor

We observe that

holds and thus $T_{\mathrm{m}00}$ is the energy density and $T_{\mathrm{m}\alpha 0}$ are the components of the momentum density times c.

We average now over a volume which contains many particles and go over to the local rest system, that is the system in which the averaged momentum density vanishes

and denote the averaged energy density of this local rest system by $\epsilon(x)$

We assume that within a local rest system we have an isotropic distribution of the velocities. More precisely, in this system $\overline{T_{\mathrm{m}\alpha\beta}}$ be diagonal and the diagonal space components coincide.

One obtains for the spacial component $\overline{T_{\mathrm{m}11}}$

the pressure P. If we single out particles with velocity component v_1 which are reflected at a wall x_1 =const. and whose density is ρ, then ρv_1 particles hit the wall per unit time and area and transfer the momentum component $2G_1$. Considering that the same number moves into the opposite direction then the contribution to the pressure is $\rho G_1 v_1$ which proves the relation given above. Removing now the average bars we have in the local rest system

We transform now into a moving system

Der erste Term reduziert sich auf $\eta_{\kappa\lambda}P$, da der metrische Tensor unter L -Transformationen invariant bleibt. Damit folgt

The first term reduces to $\eta_{\kappa\lambda}P$, since the metric tensor stays invariant under L transformation. This yields

$$T_{\mathrm{m}\kappa\lambda} = -\eta_{\kappa\lambda}P + \Lambda_{\kappa}{}^{0}\Lambda_{\lambda}{}^{0}(\epsilon + P). \tag{32.37}$$

Nun ist im Ruhesystem $u^0_\mu = c\delta_{\mu 0}$, was sich ins bewegte System zu $u_\kappa = \Lambda_\kappa{}^\mu u^0_\mu = \Lambda_\kappa{}^0 c$ transformiert. Daraus folgt der Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor wechselwirkungsfreier Teilchen

In the rest system we have $u^0_\mu = c\delta_{\mu 0}$, which transforms in the moving system to $u_\kappa = \Lambda_\kappa{}^\mu u^0_\mu = \Lambda_\kappa{}^0 c$. From this we obtain the expression for the energy momentum tensor of non-interacting particles

$$T_{\mathrm{m}\kappa\lambda} = -\eta_{\kappa\lambda}P + \frac{u_\kappa u_\lambda}{c^2}(\epsilon + P). \tag{32.38}$$

Man beachte aber, dass ϵ und P Energiedichte und Druck im lokalen Ruhesystem sind.

Note that ϵ and P are energy density and pressure in the local rest system.

33 Elektromagnetisches Feld

33 Electromagnetic Field

Dieser Abschnitt stellt weitgehend eine Zusammenfassung der Abschnitte 25 und 27 dar.

This section is to a large extend a summary of sections 25 and 27.

33.a MAXWELL-Gleichungen

33.a MAXWELL's Equations

Aus den homogenen M -Gleichungen

One concludes from the homogeneous M equations

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \tag{33.1}$$

schließt man, dass die Felder **E** und **B** durch Potentiale Φ und **A** dargestellt werden können,

that the fields **E** and **B** can be represented by potentials Φ and **A**,

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}. \tag{33.2}$$

Dabei genügt $(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A})$ in der L -Eichung

In the L gauge

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0 \rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{33.3}$$

den Gleichungen

$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A})$ obeys the equations

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{33.4}$$

mit dem ’A -Operator

with the ’A operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{33.5}$$

(Andere Autoren führen diesen Operator mit dem umgekehrten Vorzeichen ein.) Gleichung (33.2) erlaubt es dann, das elektrische und das magnetische Feld zum elektromagnetischen Feldtensor (25.3) zusammenzufassen,

(Other authors introduce this operator with the opposite sign.) Equation (33.2) allows to combine the electric and the magnetic field into the electromagnetic field-tensor (25.3)

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{33.6}$$

Er ist ein antisymmetrischer Vierertensor. Explizit lautet er

It is an antisymmetric four-tensor. It reads explicitely

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33.7}$$

Die inhomogenen M -Gleichungen lauten (25.7)

The inhomogeneous M equations read (25.7)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{33.8}$$

Da

Since

$$\Box = -\partial_\mu \partial^\mu \tag{33.9}$$

können wir

we may write

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{33.10}$$

schreiben. Die homogenen M -Gleichungen lauten

. The homogeneous M equations read

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{33.11}$$

Man beachte, dass die Gleichung nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$ nicht trivial ist. Sind zwei Indices gleich, so verschwindet die linke Seite identisch. Man kann diese Gleichungen auch mit Hilfe des dualen Feldtensors

One observes that these equations are only non-trivial for $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. If two indices are equal, then the left-hand side vanishes identically. One may represent the equations equally well by the dual field tensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \tag{33.12}$$

ausdrücken. Dabei ist $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrisch gegen Vertauschung der Indices. Das heißt, er ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden. Das impliziert, dass er verschwindet, wenn zwei Indices gleich sind. Er ist daher nur von Null verschieden, wenn alle vier Indices verschieden sind. Wir normieren ihn auf $\epsilon^{0123} = 1$. Damit hat man explizit

. Here $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ is completely antisymmetric against interchange of the four indices. Thus it changes sign, if two of the indices are exchanged. This implies that it vanishes, if two indices are equal. It is only different from zero, if all four indices are different. It is normalized to $\epsilon^{0123} = 1$. Then one obtains explicitely

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33.13}$$

und (33.11) lässt sich schreiben

and (33.11) can be written

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{33.14}$$

33.b LAGRANGE-Formulierung

33.b LAGRANGEan Formulation

33.b.α LAGRANGE-Funktion einer massiven Ladung im elektromagnetischen Feld

33.b.α LAGRANGEan of a Massive Charge in the Electromagnetic Field

Wir zeigen, die L -Funktion $\mathcal{L}$ einer Punktladung q der Masse m im elektromagnetischen Feld kann geschrieben werden als

We show that the L an $\mathcal{L}$ of a point charge q of mass m in an electromagnetic field can be written

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\dot{\mathbf{r}} \\ &= -mc^2\sqrt{1+\frac{\dot{x}^\alpha\dot{x}_\alpha}{c^2}} - \frac{q}{c}A^\mu(x)\dot{x}_\mu. \end{aligned} \tag{33.15}$$

Die Wirkung I kann dann

Then the action I can be written

$$I = \int \mathrm{d}t\mathcal{L} = -mc^2\int \mathrm{d}\tau - \frac{q}{c}\int \mathrm{d}tA^\mu\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}\tau(-mc^2 - \frac{q}{c}A^\mu u_\mu), \tag{33.16}$$

das heißt als Vierer-Skalar geschrieben werden.

that is as a four-scalar.

Wir überzeugen uns nun, dass hieraus die korrekten Bewegungsgleichungen folgen. Die Bewegungs-Gleichung lautet

Now we show that this L an yields the correct equations of motion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{33.17}$$

woraus mit

from which by use of

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{m\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}A^\alpha(\mathbf{r}(t),t) = G^\alpha + \frac{q}{c}A^\alpha \tag{33.18}$$

dann

one finally obtains

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{G} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = 0 \tag{33.19}$$

folgt. Man beachte, dass in $\dot{\mathbf{A}}$ nur die partielle Zeit-Ableitung von $\mathbf{A}$ steckt, daher haben wir $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Durch geeignetes Zusammenfassen der Beiträge folgt

. Note that $\dot{\mathbf{A}}$ contains only the partial time-derivative of $\mathbf{A}$, thus we have $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t = \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. By suitable combination of the contributions one obtains

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{G} + q(\nabla\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0, \tag{33.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{G} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{33.21}$$

Also liefert die obige L -Funktion tatsächlich die korrekte Bewegungsgleichung, in der die Zeitableitung des Impulses durch die L kraft gegeben wird.

Thus the L an given above yields the correct equation of motion where the time-derivative of the momentum is given by the L force.

33.b.β LAGRANGEdichte des elektromagnetischen Feldes

33.b.β LAGRANGEan Density of the Electromagnetic Field

Die L -Dichte L des elektromagnetischen Feldes und eines Systems von Ladungen setzt sich aus drei Anteilen zusammen

The L an density L of the electromagnetic field and of a system of charges consists of three contributions

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu + L_{\mathrm{mech}}. \tag{33.22}$$

Der mechanische Anteil ist für Punktladungen der Masse m_a

The mechanical part for point charges of mass m_a reads

$$L_{\mathrm{m}} = -\sum_a m_a c^3 \int \mathrm{d}\tau\,\delta^4(x - x_a(\tau)), \tag{33.23}$$

der nach Integration über d^4x den entsprechenden Anteil der Wirkung I in (33.15) ergibt. Der zweite Anteil in (33.22) beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Feld und der Ladung. Integration dieses Anteils für Punktladungen unter Verwendung von

which yields after integration over d^4x the corresponding contribution to the action I given in (33.15). The second contribution in (33.22) describes the interaction between field and charge. Integration of this contribution for point charges using

$$j_\mu(\mathbf{r},t) = \sum_a q_a \frac{\mathrm{d}x_{a,\mu}}{\mathrm{d}t}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \tag{33.24}$$

ergibt den entsprechenden Anteil in (33.15). Der erste Anteil ist der Beitrag des freien Feldes. Dass er die korrekten M -Gleichungen ergibt, werden wir unten nachprüfen. Die Wirkung selbst ergibt sich zu

yields the corresponding contribution in (33.15). The first contribution is that of the free field. Below we will see that it yields M 's equations correctly. The action itself reads

$$I = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x L(x) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x L(\mathbf{x},t) = \int \mathrm{d}t \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \int \mathrm{d}^3x L(\mathbf{x},t). \tag{33.25}$$

Die Wirkung muss nun extremal unter Variation der Felder A sein. Dabei betrachten wir F als Funktion von A (33.6), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dann ergibt die Variation bezüglich A

The action has to be extremal if the fields A are varied. There we have to consider F as function of A (33.6), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Then the variation with respect to A yields

$$\begin{aligned}
\delta L &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\nu \delta A^\nu && (33.26)\\
\delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu && (33.27)\\
F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu}\partial^\nu \delta A^\mu = 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu && (33.28)\\
\delta L &= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c} j_\nu \delta A^\nu. && (33.29)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Variation der Wirkung nach A

Thus the variation of the action with respect to A is

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int \mathrm{d}^4x \Big(-\frac{1}{4\pi c} F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu \Big)\\
&= -\int \mathrm{d}^4x \frac{1}{4\pi c} \partial^\mu (F_{\mu\nu}\delta A^\nu) + \int \mathrm{d}^4x \Big(\frac{1}{4\pi c} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\nu \Big) \delta A^\nu. && (33.30)
\end{aligned}$$

Der erste Term der zweiten Zeile ist ein Oberflächen-Term (im vier-dimensionalen Raum). Aus dem zweiten Term folgen die inhomogenen M -Gleichungen (33.8)

The first term of the second line is a surface-term (in four dimensions). From the second term one concludes M 's inhomogeneous equations (33.8)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \qquad (33.31)$$

Die homogenen M -Gleichungen sind bereits durch die Darstellung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ erfüllt.

M 's homogeneous equations are already fulfilled due to the representation $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

34 Allgemeiner Energie-Impuls-Tensor

34 General Energy-Momentum Tensor

34.a LAGRANGE-Funktion

34.a LAGRANGEan function

Wir wollen in diesem Abschnitt die Form des Energie-Impuls-Tensors für eine recht allgemeine L -Funktion $\mathcal{L}$ bestimmen. Diese setze sich aus zwei Anteilen zusammen, einem reinen Feldanteil $\mathcal{L}_\mathrm{F}$ sowie einem Anteil $\mathcal{L}_\mathrm{m}$ der Massenpunkte, die wir mit a durchnummerieren. Die Massenpunkte bewegen sich auf Weltlinien $\mathbf{r}_a(t)$. Die L -Funktion können wir dann

In this section we will determine the form of the energy-momentum tensor for a general L an $\mathcal{L}$. It will consist of two contributions, a pure field contribution $\mathcal{L}_\mathrm{F}$ and a contribution $\mathcal{L}_\mathrm{m}$ for the mass points which we number by a. The mass points move along world lines $\mathbf{r}_a(t)$. Then the L an function can be written

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{F} + \mathcal{L}_\mathrm{m} \tag{34.1}$$

schreiben. Der Feldanteil ist ein Integral über die Dichte der L -Funktion der Felder, die wir hier mit Ψ_i bezeichnen

. The field contribution is an integral of the density of the L an function of the fields which we denote here by Ψ_i

$$\mathcal{L}_\mathrm{F} = \int \mathrm{d}^3x\, L_\mathrm{F}(\Psi(x), \partial\Psi(x)). \tag{34.2}$$

Wir müssen zunächst nicht zwischen skalaren und vektoriellen Feldern unterscheiden. Den mechanischen Beitrag schreiben wir

At the moment we need not distinguish between scalar and vector fields. The mechanical contribution can be written

$$\mathcal{L}_\mathrm{m} = \sum_a \mathcal{L}_a, \quad \mathcal{L}_a = -M_a c^2 \gamma_a^{-1}, \tag{34.3}$$

wobei M_a zunächst die Masse m_a enthält, aber auch Beiträge, mit denen es an die Felder Ψ gekoppelt ist,

where first of all M_a contains the mass m_a but also contributions from the coupling to the fields Ψ

$$M_a = M_a(\Psi(x_a), \partial\Psi(x_a), u_a), \quad \gamma_a^{-1} = \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_a^2}{c^2}}. \tag{34.4}$$

Dabei ist u die Weltgeschwindigkeit der Masse. Für eine Ladung q_a hat man zum Beispiel

u is the world velocity of the mass. For a charge q_a one has for example

$$M_a = m_a + \frac{q_a}{c^3} u_{a\mu} A^\mu(x_a). \tag{34.5}$$

Den mechanischen Anteil können wir ausdrücken durch die Dichte L_m

The mechanical contribution can be expressed by the density L_m

$$\mathcal{L}_\mathrm{m} = \int \mathrm{d}^3x\, L_\mathrm{m}(x), \quad L_\mathrm{m}(x) = -\sum_a M_a c^2 \delta_a(x). \tag{34.6}$$

34.b Bewegungs-Gleichungen

34.b Equations of Motion

Die Bewegungs-Gleichungen erhalten wir wieder aus der Forderung, dass die Wirkung

Again the equations of motion are obtain from the requirement that the action

$$I = \int \mathrm{d}t \mathcal{L} \tag{34.7}$$

extremal wird, also die Variation verschwindet

is extremal and thus its variation vanishes

$$\delta I = 0. \tag{34.8}$$

Generell erhält man für eine L -Dichte, die von einem Feld Ψ und seinen Ableitungen abhängt, durch Variation

Generally one obtains for a L an density, which depends on a field Ψ and its derivatives by variation

$$\begin{aligned} c\delta I &= \int \mathrm{d}^4 x \delta L(x) \\ &= \sum_i \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_i} \delta\Psi_i(x) + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \Psi_i)} \partial^\mu \delta\Psi_i(x) \right) \\ &= \sum_i \int \mathrm{d}^4 x \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \Psi_i)} \delta\Psi_i(x) \right) + \sum_i \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_i} - \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \Psi_i)} \right) \right) \delta\Psi_i(x). \end{aligned} \tag{34.9}$$

Das erste Integral der letzten Zeile lässt sich in ein Oberflächenintegral über den Rand des vierdimensionalen Volumens umformen. Mit der Forderung, dass die Variation $\delta\Psi$ auf dieser Oberfläche verschwindet, verschwindet auch dieses Integral. Damit verschwindet die Variation der Wirkung, wenn das zweite Integral verschwindet, woraus die Bewegungsgleichungen für die Felder Ψ_i folgen

The first integral of the last line can be expressed by a surface integral over the boundary of the four-dimensional volume. This integral vanishes with the requirement that the variation $\delta\Psi$ vanishes on that boundary. Thus the variation of the action vanishes if the second integral vanishes which yields the equation of motion for the fields Ψ_i

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \Psi_i)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Psi_i} = 0. \tag{34.10}$$

Für die Massenpunkte, wobei ich häufig den Index a weglasse, haben wir

For the mass-points, where I often skip the index a, we have

$$\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot{x}_\alpha} = -\frac{\partial(M_a c^2 \gamma^{-1})}{\partial \dot{x}_\alpha} = -M_a \dot{x}^\alpha \gamma - c^2 \gamma^{-1} \frac{\partial M_a}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial \dot{x}_\alpha} \tag{34.11}$$

mit

with

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial \dot{x}_\alpha} = \delta^\alpha_\mu \gamma_a - \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}_\mu \gamma^3}{c^2}, \tag{34.12}$$

Man beachte, dass

Consider that

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sum_\beta \dot{x}^2_\beta}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\sum_\beta \dot{x}^2_\beta}{c^2}\right)^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-2\dot{x}_\alpha}{c^2}\right) = \frac{\gamma^3 \dot{x}_\alpha}{c^2} = -\frac{\gamma^3 \dot{x}^\alpha}{c^2}. \tag{34.13}$$

Daraus folgen die Ableitungen

From this one obtains the derivatives

$$\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot{x}_\alpha} = -P^\alpha_a, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial x_\alpha} = -\gamma_a^{-1} K^\alpha_a \tag{34.14}$$

mit verallgemeinertem Impuls und verallgemeinerter Kraft

with generalized momentum and generalized force

$$\begin{aligned} P^\nu_a &:= M_a u^\nu_a + c^2 \frac{\partial M_a}{\partial u_\nu} - \frac{\partial M_a}{\partial u^\mu} u^\nu u^\mu, & (34.15) \\ K^\nu_a &:= c^2 \sum_i \left(\frac{\partial M_a}{\partial \Psi_i} \partial^\nu \Psi_i + \frac{\partial M_a}{\partial \partial_\mu \Psi_i} \partial_\mu \partial^\nu \Psi_i \right) & (34.16) \end{aligned}$$

und damit aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot{x}_{a\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial x_{a\alpha}}$ die Bewegungsgleichung

and thus the equation of motion from $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \dot{x}_{a\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial x_{a\alpha}}$

$$\frac{\mathrm{d}P^\alpha_a}{\mathrm{d}t} = K^\alpha_a \gamma_a^{-1}. \tag{34.17}$$

Wir zeigen nun, dass diese Gleichung auch für die Nullkomponente gilt. Dazu setzen wir

We show now that this equation holds for the 0-component, too. For this purpose we put

$$\frac{\mathrm{d}P^0_\alpha}{\mathrm{d}t} = (K^0_a + \delta K^0_a)\gamma_a^{-1} \tag{34.18}$$

an und zeigen, dass $\delta K^0_a = 0$ gilt. Aus (34.15) erhalten wir

and show that $\delta K^0_a = 0$ holds. From (34.15) we obtain

$$P^\nu_a u_{a\nu} = M_a c^2 \tag{34.19}$$

und leiten den Ausdruck nach der Zeit ab. Verwenden wir die rechte Seite von (34.19), so folgt

and determine the time-derivative. If we use the right-hand side of (34.19) then we obtain

$$c^2\frac{\mathrm{d}M_a}{\mathrm{d}t} = c^2\sum_i\left(\frac{\partial M_a}{\partial\Psi_i}\partial^\nu\Psi_i + \frac{\partial M_a}{\partial\partial_\mu\Psi_i}\partial_\mu\partial^\nu\Psi_i\right)\dot{x}_\nu + c^2\frac{\partial M_a}{\partial u_\mu}\dot{u}_\mu = K^\nu_a u_\nu\gamma_a^{-1} + c^2\frac{\partial M_a}{\partial u_\mu}\dot{u}_\mu \tag{34.20}$$

Leiten wir die linke Seite nach der Zeit ab, so erhalten wir

If we take the time-derivative of the left-hand side then we obtain

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P^\nu_a u_{a\nu}) = K^\nu_a u_{a\nu}\gamma_a^{-1} + \delta K^0 c + P^\nu_a\dot{u}_\nu \tag{34.21}$$

Für den letzten Ausdruck erhalten wir

The last expression yields

$$P^\nu_a\dot{u}_\nu = Mu^\nu\dot{u}_\nu + c^2\frac{\partial M}{\partial u_\nu}\dot{u}_\nu - u^\mu\frac{\partial M}{\partial u^\mu}u^\nu\dot{u}_\nu = c^2\frac{\partial M}{\partial u_\nu}\dot{u}_\nu, \tag{34.22}$$

da $u^\nu\dot{u}_\nu = \frac{\partial}{\partial t}(u^\nu u_\nu)/2 = 0$. Setzen wir dies in (34.21) ein und berücksichtigen, dass die Ableitungen (34.20) und (34.21) übereinstimmen müssen, so folgt $\delta K^0 = 0$. Daher gilt auch für die $\nu = 0$-Komponente die Bewegungs-Gleichung

since $u^\nu\dot{u}_\nu = \frac{\partial}{\partial t}(u^\nu u_\nu)/2 = 0$. If we insert this into (34.21) and consider that the derivatives (34.20) and (34.21) agree, then one obtains $\delta K^0 = 0$. Thus for the equation of motion holds for the $\nu = 0$-component, too,

$$\frac{\mathrm{d}P^\nu_a}{\mathrm{d}t} = K^\nu_a\gamma_a^{-1}. \tag{34.23}$$

Für elektrische Ladungen (34.5) erhält man den verallgemeinerten Impuls und die verallgemeinerte Kraft

One obtains the generalized momentum and generalized force for electric charges (34.5)

$$P^\nu_a = m_a u^\nu_a + \frac{q_a}{c}A^\nu, \quad K^\nu_a = \frac{q_a}{c}u_{a\mu}\partial^\nu A^\mu \tag{34.24}$$

Die zeitliche Änderung von P ergibt sich zu

The temporal change of P yields

$$\frac{\mathrm{d}P^\nu_a}{\mathrm{d}t} = m_a\frac{\mathrm{d}u^\nu_a}{\mathrm{d}t} + \frac{q_a}{c}\partial^\mu A^\nu\dot{x}_{a\mu} = K^\nu_a\gamma_a^{-1} \tag{34.25}$$

und damit erhält man

and thus one obtains

$$m_a\frac{\mathrm{d}u^\nu_a}{\mathrm{d}t} = \frac{q_a}{c}\dot{x}_{a\mu}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu). \tag{34.26}$$

Gleichung (34.25) lautet manifest L -invariant

Equation (34.25) reads in a manifestly L invariant form

$$\frac{\mathrm{d}P^\nu_a}{\mathrm{d}\tau} = K^\nu_a. \tag{34.27}$$

34.c Kanonischer Energie-Impuls-Tensor

34.c Canonical Energy-Momentum Tensor

Wir wollen nun den Energie-Impuls-Tensor bestimmen. Wir führen zunächst einen Feld-Anteil

Now we determine the energy-momentum tensor. We first introduce a contribution of the field

$$T_{\mathrm{F}\mu\nu} = \sum_i\frac{\partial L}{\partial(\partial^\nu\Psi_i)}\partial_\mu\Psi_i - \eta_{\mu\nu}L_\mathrm{F} \tag{34.28}$$

ein. Es folgt dann

$$\partial^\nu T_{\mathrm{F}\mu\nu} = \sum_i \left(\partial^\nu \partial_\mu \Psi_i \frac{\partial L}{\partial(\partial^\nu \Psi_i)} + \partial_\mu \Psi_i \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial^\nu \Psi_i)} - \partial^\nu \partial_\mu \Psi_i \frac{\partial L_\mathrm{F}}{\partial(\partial^\nu \Psi_i)} - \partial_\mu \Psi_i \frac{\partial L_\mathrm{F}}{\partial \Psi_i} \right) \tag{34.29}$$

Von den Termen mit zweiten Ableitungen $\partial\partial\Psi$ (erster und dritter Term) heben sich die aus L_F weg, so dass nur welche aus L_m übrig bleiben. Weiter können wir die Bewegungs-Gleichung für Ψ für den zweiten und den vierten Term verwenden, so dass

$$\partial^\nu T_{\mathrm{F}\mu\nu} = \sum_i \left(\partial^\nu \partial_\mu \Psi_i \frac{\partial L_\mathrm{m}}{\partial(\partial^\nu \Psi_i)} + \partial_\mu \Psi_i \frac{\partial L_\mathrm{m}}{\partial \Psi_i} \right) = -\sum_a K_{a\mu} \delta_a(x) \tag{34.30}$$

bleibt. Die Divergenz des Feldanteils des Energie-Impuls-Tensors ergibt gerade die negative Kraft auf die Massenpunkte.

Wir führen den Ansatz

$$T_{\mathrm{m}\mu\nu} = \sum_a \hat{T}_{a\mu\nu} \delta_a(x) \tag{34.31}$$

für den mechanischen Anteil des Energie-Impuls-Tensors ein, ohne $\hat{T}_{a\mu\nu}$ sogleich festzulegen. Bei der Divergenz-Bildung entstehen Ableitungen der δ-Funktion. Diese Beiträge müssen sich wegheben. Daher betrachten wir zuerst

$$\partial^\nu T_{\mathrm{m}\mu\nu} = \sum_a \partial^\nu (\hat{T}_{a\mu\nu} \gamma_a^{-1}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) + (\hat{T}_{a\mu\alpha} - \dot{x}_{a\alpha} \hat{T}_{a\mu 0}) \gamma_a^{-1} \nabla^\alpha \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{34.32}$$

Es muss daher $\hat{T}_{a\mu\alpha} = \dot{x}_{a\alpha} \hat{T}_{a\mu 0}$ gelten. Wir setzen daher

$$\hat{T}_{a\mu\nu} = \hat{P}_{a\mu} u_{a\nu} \tag{34.33}$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\hat{P}_a$. Es folgt dann

$$T_{\mathrm{m}\mu\nu} = \sum_a \hat{P}_{a\mu} \dot{x}_{a\nu} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a \hat{P}_{a\mu} j_{a\nu}. \tag{34.34}$$

Damit folgt

$$\partial^\nu T_{\mathrm{m}\mu\nu} = \partial^\nu \hat{P}_{a\mu} \dot{x}_\nu \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \frac{\mathrm{d}\hat{P}_{a\mu}}{\mathrm{d}t} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{34.35}$$

Unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung für die Massenpunkte folgt nun, dass sich die Beiträge (34.30) und (34.35) für $\hat{P}_a = P_a$ wegheben. Es gilt also mit

$$T_{\mathrm{m}\mu\nu} = \sum_a P_{a\mu} j_{a\nu} \tag{34.36}$$

der Erhaltungs-Satz

$$\partial^\nu T_{\mathrm{c}\mu\nu} = 0 \tag{34.37}$$

mit dem kanonischen Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mathrm{c}\mu\nu} = T_{\mathrm{F}\mu\nu} + T_{\mathrm{m}\mu\nu}. \tag{34.38}$$

. Then one obtains

Out of the terms with second derivatives $\partial\partial\Psi$ (first and third term) those of L_F cancel so that those of L_m are left. Further we may use the equations of motion for Ψ for the second and the third term so that we are left with

. The divergency of the field part of the energy-momentum tensor yields precisely the negative force exerted on the mass points.

We introduce the ansatz

for the mechanical contribution of the energy-momentum tensor without fixing $\hat{T}_{a\mu\nu}$ immediately. Performing the divergency one obtains derivatives of the δ-function. These contributions have to cancel. Thus we consider first

Thus $\hat{T}_{a\mu\alpha} = \dot{x}_{a\alpha} \hat{T}_{a\mu 0}$ has to hold. Thus we put

with a function $\hat{P}_a$ to be determined. Then one obtains

Thus one obtains

Considering the equations of motion for the mass-points it follows that the contributions (34.30) und (34.35) cancel for $\hat{P}_a = P_a$. Thus with

one obtains the conservation theorem

with the canonical energy-momentum tensor

Für ein ideales Gas, das heißt für Materie oder Strahlung ohne jegliche Wechselwirkung, erhalten wir mit $M_a = m_a$ aus (34.36) den Energie-Impuls-Tensor

For an ideal gas that is for matter or radiation without any interaction we obtain from (34.36) with $M_a = m_a$ the energy momentum tensor

$$T_{\mathrm{m}\mu\nu}(x) = \sum_a m_a u_{a\mu} u_{a\nu} \delta_a(x) \tag{34.39}$$

wie in (32.30).

as in (32.30).

34.d Symmetrischer Energie-Impuls-Tensor

34.d Symmetric energy-momentum tensor

Wir hatten in Abschnitt 28 gesehen, dass die Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors wesentlich für die Erhaltung des Drehimpulses ist. Tatsächlich ist der kanonische Tensor T_c nur für skalare Felder Φ symmetrisch, aber nicht für vektorielle Felder A, wenn deren Ableitungen ∂A in der L -Dichte auftreten, wie wir unten zeigen werden.

We have seen in section 28 that the symmetry of the energy-momentum tensor is necessary for conservation of angular momentum. However the canonical tensor T_c is only symmetric for scalar fields Φ, but not for vector-fields A, if their derivatives ∂A appear in the L an density as we will show below.

Tatsächlich kann man zum Tensor T_c noch einen Term hinzuaddieren,

Indeed one can add a term to the tensor T_c

$$T_{\mu\nu} = T_{\mathrm{c}\mu\nu} + \partial^\kappa \psi_{\mu\nu\kappa} \tag{34.40}$$

mit der Bedingung

with the condition

$$\psi_{\mu\nu\kappa} = -\psi_{\mu\kappa\nu}. \tag{34.41}$$

Denn dann ist

Then one has

$$\partial^\nu \partial^\kappa \psi_{\mu\nu\kappa} = 0 \tag{34.42}$$

so dass auch

so that

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0 \tag{34.43}$$

gilt. Dies kann verwendet werden, um einen symmetrischen Energie-Impuls-Tensor T zu erhalten.

holds, too. This can be used in order to obtain a symmetric energy-momentum tensor T.

Hierzu stellen wir fest, wie sich $T_{\mathrm{c}\mu\nu}$ von $T_{\mathrm{c}\nu\mu}$ unterscheidet, wobei wir voraussetzen, dass die Dichte L_F und die M_a invariant unter L -Transformationen sind. Hierzu müssen wir nun zwischen skalaren Feldern Φ_i und vektoriellen Feldern A_i unterscheiden, da sich diese unterschiedlich transformieren. Sie treten nun an Stelle der Ψ_i. Unter einer infinitesimalen L -Transformation gilt

For this purpose we determine the difference between $T_{\mathrm{c}\mu\nu}$ and $T_{\mathrm{c}\nu\mu}$. We require that the density L_F and the M_a are invariant under L transformations. For this purpose we have to distinguish between scalar fields Φ_i and vector-fields A_i, since they transform differently. They replace now the fields Ψ_i. For an infinitesimal L transformation one has

$$\Phi \to \Phi \qquad \partial_\mu \Phi \to \partial_\mu \Phi + \omega_{\mu\nu} \partial^\nu \Phi, \tag{34.44}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \omega_{\mu\nu} A^\nu \qquad \partial_\mu A_\kappa \to \partial_\mu A_\kappa + \omega_{\mu\nu} \partial^\nu A_\kappa + \omega_{\kappa\nu} \partial_\mu A^\nu, \tag{34.45}$$

$$j_{a\mu} \to j_{a\mu} + \omega_{\mu\nu} j_a^\nu, \qquad u_{a\mu} \to u_{a\mu} + \omega_{\mu\nu} u^\nu, \tag{34.46}$$

wobei ω infinitesimal und antisymmetrisch ist, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Sonst sind die $\omega_{\mu\nu}$ unabhängig. Unter einer solchen Transformation findet man

where ω is infinitesimal and antisymmetric, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Apart from this restriction the matrix elements $\omega_{\mu\nu}$ are independent. Under such a transformation one obtains

$$L_\mathrm{F} \to L_\mathrm{F} + \omega_{\mu\nu} \Delta_\mathrm{F}^{\nu\mu}, \quad M_a \to M_a + \omega_{\mu\nu} \Delta_a^{\nu\mu}. \tag{34.47}$$

Wegen der L -Invarianz sind die Δ symmetrisch,

Due to L invariance the Δs are symmetric.

$$\Delta_{\rm F}^{\mu\nu} = \Delta_{\rm F}^{\nu\mu}, \quad \Delta_a^{\mu\nu} = \Delta_a^{\nu\mu}. \tag{34.48}$$

Die explizite Berechnung der Δ ergibt

The explicit calculation of the Δs yields

$$\Delta_{\rm F}^{\nu\mu} = \sum_i \partial^\nu \Phi_i \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} + \sum_i \left(A_i^\nu \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial A_{i\mu}} + \partial^\nu A_{i\kappa} \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial(\partial_\mu A_{i\kappa})} + \partial_\kappa A_i^\nu \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial(\partial_\kappa A_{i\mu})} \right), \tag{34.49}$$

$$\Delta_a^{\nu\mu} = \sum_i \partial^\nu \Phi_i \frac{\partial M_a}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} + \sum_i \left(A_i^\nu \frac{\partial M_a}{\partial A_{i\mu}} + \partial^\nu A_{i\kappa} \frac{\partial M_a}{\partial(\partial_\mu A_{i\kappa})} + \partial_\kappa A_i^\nu \frac{\partial M_a}{\partial(\partial_\kappa A_{i\mu})} \right) + \frac{\partial M_a}{\partial u_{a\mu}} u_{a\nu}. \tag{34.50}$$

Damit folgt dann

This yields

$$\begin{aligned} & T_{{\rm c}\mu\nu} - \Delta_{{\rm F}\mu\nu} - c^2 \sum_a \Delta_{a\mu\nu} \delta_a(x) \\ &= -\sum_i \left(A_{i\mu} \frac{\partial L}{\partial A_i^\nu} + \partial_\kappa A_{i\mu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\kappa A_i^\nu)} \right) - \eta_{\mu\nu} L_{\rm F} + \sum_a \left(M_a - \frac{\partial M_a}{\partial u_a^\kappa} u_a^\kappa \right) u_{a\mu} u_{a\nu} \delta_a(x). \end{aligned} \tag{34.51}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung kann unter Verwendung der Bewegungs-Gleichung für A_i^μ in der Form $-\partial^\kappa \hat\psi_{\mu\kappa\nu}$ mit

Using the equation of motion for $A_{i\mu}$ the first sum on the right-hand side of this equation can be written $-\partial^\kappa \hat\psi_{\mu\kappa\nu}$ with

$$\hat\psi_{\mu\kappa\nu} = \sum_i A_{i\mu} \frac{\partial L}{\partial(\partial^\kappa A_i^\nu)} \tag{34.52}$$

geschrieben werden. Wir finden dann unter Verwendung der Symmetrie von $\Delta_{\rm F}$ und von Δ_a, dass $T_{{\rm c}\mu\nu} + \partial^\kappa \hat\psi_{\mu\kappa\nu}$ symmetrisch ist gegen Vertauschung von μ und ν. Allerdings erfüllt dieses $\hat\psi$ nicht die Bedingung (34.42). Man findet schließlich, dass ψ gegeben durch

. Since $\Delta_{\rm F}$ and Δ_a are symmetric, the expression $T_{{\rm c}\mu\nu} + \partial^\kappa \hat\psi_{\mu\kappa\nu}$ is symmetric against exchange of μ and ν. However this $\hat\psi$ does not fulfill the condition (34.42). Finally one finds that ψ given by

$$\psi_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\hat\psi_{\mu\kappa\nu} - \hat\psi_{\mu\nu\kappa} - \hat\psi_{\nu\mu\kappa} + \hat\psi_{\kappa\mu\nu} + \hat\psi_{\kappa\nu\mu} - \hat\psi_{\nu\kappa\mu} \right). \tag{34.53}$$

einen symmetrischen Energie-Impuls Tensor T, Gl. (34.40) ergibt, der B -Tensor genannt wird. Dabei bewirken der erste und sechste Term die Symmetrisierung, während der zweite plus dritte Term symmetrisch sind, wie auch der vierte plus fünfte. Die zusätzliche Bedingung (34.41) erfüllen paarweise der erste und zweite Term, der dritte und vierte, und der fünfte und sechste Term. Daher ist der kanonische Energie-Impuls-Tensor $T_{\rm c}$ symmetrisch, wenn keine Ableitungs-Terme ∂A in der Lagrange-Funktion auftreten. Kommen diese aber vor, so benötigt man zur Symmetrisierung die Terme $\partial\psi$.

yields a symmetric energy-momentum tensor T, eq. (34.40), which is called B tensor. The first and sixth term produce the symmetrization, whereas the second plus third term are symmetric and also the fourth plus fifth term. The additional condition (34.41) is fulfilled pairwise by the first and second term, by the third and fourth one, and by the fifth and sixth one. Thus the canonical energy-momentum tensor $T_{\rm c}$ is symmetric if no derivative terms ∂A appear in the L an function. If such terms are present one needs the terms $\partial\psi$ for symmetrization.

34.e Beispiel: Ladungen im elektromagnetischen Feld

34.e Example: Charges in Electromagnetic Field

Als Beispiel betrachten wir geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld. Mit

As an example we consider charged particles in an electromagnetic field. With

$$L_{\rm F} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{34.54}$$

folgt mit (34.28), das nun

one obtains with (34.28) which now reads

$$T_{\mathrm{F}\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\nu A^\kappa)} \partial_\mu A^\kappa - \eta_{\mu\nu} L_{\mathrm{F}} \tag{34.55}$$

lautet,

$$T_{\mathrm{F}\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu A^\kappa F_{\nu\kappa} + \eta_{\mu\nu} \frac{1}{16\pi} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}. \tag{34.56}$$

Weiter folgt aus (34.36)

Further one obtains from (34.36)

$$T_{\mathrm{m}\mu\nu} = \sum_a P_{a\mu} J_{a\nu} = \sum_a m_a u_{a\mu} u_{a\nu} \delta_a(x) + \frac{1}{c} A_\mu j_\nu. \tag{34.57}$$

Der erste Term ist der Energie-Impuls-Tensor von wechselwirkungsfreien Massen.
Der zweite Term ist ein Wechselwirkungsbeitrag zwischen Ladungen und Feld. Es sei darauf hingewiesen, dass die Aufteilung in Feld- und Materiebeitrag durchaus willkürlich ist.
Schließlich ergibt sich aus (34.52)

The first term yields the energy-momentum tensor of particles without interaction.
The second term is a contribution to the interaction between charges and fields. However, the separation into field and matter contribution is arbitrary.

Finally one obtains from (34.52)

$$\hat{\psi}_{\mu\kappa\nu} = A_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial^\kappa A^\nu)} = -\frac{1}{4\pi} A_\mu F_{\kappa\nu} \tag{34.58}$$

und daraus

and thus

$$\psi_{\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{8\pi} \Big(A_\mu F_{\kappa\nu} - A_\mu F_{\nu\kappa} - A_\nu F_{\mu\kappa} + A_\kappa F_{\mu\nu} + A_\kappa F_{\nu\mu} - A_\nu F_{\kappa\mu} \Big) = -\frac{1}{4\pi} A_\mu F_{\kappa\nu}. \tag{34.59}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in

If we insert these expressions into

$$T_{\mu\nu} = T_{\mathrm{F}\mu\nu} + T_{\mathrm{m}\mu\nu} + \partial^\kappa \psi_{\mu\nu\kappa} \tag{34.60}$$

ein, so erhalten wir

then we obtain

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F_{\nu\kappa} (\partial^\kappa A_\mu - \partial_\mu A^\kappa) + A_\mu (\frac{1}{c} j_\nu - \frac{1}{4\pi} \partial^\kappa F_{\kappa\nu}) + \frac{1}{16\pi} \eta_{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} + \sum_a m_a u_{a\mu} u_{a\nu} \delta_a(x). \tag{34.61}$$

Die erste Klammer lässt sich durch F ausdrücken, die zweite verschwindet auf Grund der Bewegungsgleichung für das elektromagnetische Feld, so dass schließlich

The first bracket can be expressed by F, the second one vanishes due to the equation of motion for the electromagnetic field, so that finally

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F_{\nu\kappa} F^\kappa{}_\mu + \frac{1}{16\pi} \eta_{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} + \sum_a m_a u_{a\mu} u_{a\nu} \delta_a(x) \tag{34.62}$$

bleibt. Bis auf den in Abschnitt 28 nicht betrachteten Beitrag der kinetischen Energie stimmt das Ergebnis mit (28.9) überein. Man beachte, dass die Symmetrisierung gleichzeitig einen eichinvarianten Energie-Impuls-Tensor ergibt.

is obtained. The result agrees with (28.9) apart from the contribution of the kinetic energy not considered in section 28. Note that the symmetrization yields simultaneously a gauge-invariant energy-momentum tensor.

35 Elastisches Dielektrikum

35 Elastic Dielectric

Wir wollen nun eine relativistisch invariante Formulierung für einen elastischen Festkörper geben, der dielektrische und magnetische Eigenschaften hat.

In the following we give a relativistic invariant formulation for an elastic solid with dielectric and magnetic properties.

35.a Koordinaten des Festkörpers

35.a Coordinates of the Solid

Um die elastischen Eigenschaften zu beschreiben, führen wir drei Koordinaten ξ^i ein, die körperfest sind. Wir überziehen den Festkörper mit diesen Koordinaten. Diese können etwa die Schichten eines Kristalls zählen, seien jedoch als kontinuierliche Variable gedacht. Man kann sie auch so wählen, dass der Festkörper in Ruhe etwa mit $\xi^\alpha = x^\alpha$ im Gleichgewicht ist. Jedoch ist man hierauf nicht festgelegt. Die körperfesten Koordinaten sind Funktionen von Ort und Zeit, $\xi^i = \xi^i(x)$. Verzerrungen sind durch $\partial_\mu \xi^i$ gegeben. Wir bemerken, dass die ξ^i Skalare sind. Die L -Dichte hängt von den $\partial_\mu \xi^i$ ab. Falls der Festkörper homogen ist, können die ξ^i so gewählt werden, dass die L -Dichte nicht von ξ^i abhängt. Wir wollen nun aus diesen Ableitungen zwei Größen bilden, die im Folgenden wesentlich sein werden. Als erstes betrachten wir

In order to describe the elastic properties we introduce three coordinates ξ^i which are body fixed. We cover the solid with these coordinates. They may count the layers of a crystal, but should be interpolated to be continuous variables. They may be chosen so that the solid at rest is in equilibrium with $\xi^\alpha = x^\alpha$. This is however only a possibility. The body fixed coordinates are functions of position and time, $\xi^i = \xi^i(x)$. Distortions are given by $\partial_\mu \xi^i$. We note that the ξ^i are scalars. The L an density depends on $\partial_\mu \xi^i$. If the solid is homogeneous then ξ^i may be chosen in such a way that the L an density does not depend on ξ^i. We will introduce two quantities from these derivatives which will be of importance in the following. At first we consider

$$\Omega^\mu = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \partial_\nu \xi^1 \partial_\kappa \xi^2 \partial_\lambda \xi^3. \tag{35.1}$$

Dieses Ω ist orthogonal auf den $\partial \xi$,

This Ω is orthogonal to the $\partial \xi$,

$$\Omega^\mu \partial_\mu \xi^i = 0, \tag{35.2}$$

was sich wegen des antisymmetrischen Tensors ϵ unmittelbar ergibt. Das Ω ist proportional zur Vierergeschwindigkeit u, denn längs der Weltlinie muss

which follows immediately from the antisymmetric tensor ϵ. Ω is proportional to the four-velocity u, since along the world-line

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\tau} = \partial_\mu \xi^i u^\mu = 0 \tag{35.3}$$

gelten. Diese drei Gleichungen werden durch $\Omega^\mu \propto u^\mu$ gelöst. Mit der Normierung $u^\mu u_\mu = c^2$ erhält man

has to hold. These three equations are solved by $\Omega^\mu \propto u^\mu$. With the normalization $u^\mu u_\mu = c^2$ one obtains

$$u^\mu = \pm \frac{c\Omega^\mu}{\sqrt{\Omega^\nu \Omega_\nu}}. \tag{35.4}$$

u^0 muss positiv sein. Falls (x^1, x^2, x^3) und $(\mathrm{d}\xi^1, \mathrm{d}\xi^2, \mathrm{d}\xi^3)$ beide eine Rechts-Basis oder beide eine Links-Basis bilden, ist Ω^0 positiv und es gilt das positive Vorzeichen (was wir im Folgenden annehmen wollen), sonst das Minus-Zeichen.

u^0 has to be positive. If both (x^1, x^2, x^3) and $(\mathrm{d}\xi^1, \mathrm{d}\xi^2, \mathrm{d}\xi^3)$ constitute a right basis or both a left basis, then Ω^0 is positive and the positive sign applies, (which will be assumed in the following), otherwise the minus-sign.

Zum anderen wollen wir noch die Vierer-Skalare

Secondly we introduce the four-scalars

$$\hat{\eta}^{ij} = -\partial^\mu \xi^i \partial_\mu \xi^j = \hat{\eta}^{ji} \tag{35.5}$$

einführen. Diese Größen sind eng mit dem Verzerrungstensor verknüpft. Diesen definiert man über die Veränderung der Länge zwischen den raumfesten Punkten ξ und $\xi + \mathrm{d}\xi$ des Systems in Ruhe

. This quantities are closely related to the strain tensor. This tensor is defined by the change of the distance of body fixed points ξ and $\xi + \mathrm{d}\xi$ of the system at rest

$$\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = E_{ij}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\xi^j \quad E_{ij} = -\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^j}. \tag{35.6}$$

Hat man die Koordinaten so eingeführt, dass $\xi^\alpha = x^\alpha$ ein unverzerrter Zustand ist, dann führt man in der Regel den Verzerrungstensor $\hat{\epsilon}$ über $E_{ij} = \delta_{ij} + 2\hat{\epsilon}_{ij}$ ein. Wir erlauben hier aber eine allgemeinere Definition der ξ^i. Im Ruhesystem gilt nun

If the coordinates are introduced so that $\xi^\alpha = x^\alpha$ in the undistorted state, then the strain tensor $\hat{\epsilon}$ is usually introduced by $E_{ij} = \delta_{ij} + 2\hat{\epsilon}_{ij}$. Here we allow a more general definition of the ξ^i. Then one has in the rest system

$$E_{ij}\hat{\eta}^{jk} = (-\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^j}) \cdot (-\frac{\partial \xi^j}{\partial x_\beta}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^\beta}). \tag{35.7}$$

Wir multiplizieren zunächst den zweiten mit dem dritten Faktor und dann die beiden anderen miteinander und finden

We multiply at first the second with the third factor and then the other two factors and obtain

$$E_{ij}\hat{\eta}^{jk} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}\delta^\beta_\alpha\frac{\partial \xi^k}{\partial x^\beta} = \delta^k_i. \tag{35.8}$$

Der Tensor $\hat{\eta}$ ist also gerade das Inverse des Tensors E.

Thus the tensor $\hat{\eta}$ is the inverse of the tensor E.

Wir bemerken, dass die vier Komponenten von Ω und die sechs Komponenten von $\hat{\eta}$ nicht unabhängig voneinander sind. Es gilt vielmehr

We note that the four components of Ω and the six components of $\hat{\eta}$ are not independent of each other. Rather one has

$$\det(\hat{\eta}) = \Omega^\mu\Omega_\mu. \tag{35.9}$$

Dies ergibt sich im Ruhesystem unmittelbar aus dem Determinanten-Multiplikations-Satz. Aus dem Ausdruck für E (35.6) folgt dann $\det(\eta) = (\Omega^0)^2$. Die anderen Komponenten von Ω verschwinden im Ruhesystem. Aus der Lorentz-Invarianz folgt dann (35.9) im allgemeinen Fall.

This can be obtained immediately from the determinant multiplication theorem in the rest system. From the expression for E (35.6) one obtains $\det(\eta) = (\Omega^0)^2$. The other components vanish in the rest system. Lorentz invariance yields (35.9) in the general case.

35.b Polarisation und Magnetisierung

35.b Polarization and Magnetization

Um die dielektrischen und magnetischen Eigenschaften zu beschreiben, führen wir den Tensor

In order to describe the dielectric and magnetic properties we introduce the tensor

$$(M^{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 0 & -P^1 & -P^2 & -P^3 \\ P^1 & 0 & M^3 & -M^2 \\ P^2 & -M^3 & 0 & M^1 \\ P^3 & M^2 & -M^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35.10}$$

ein, der die Komponenten der Magnetisierung und Polarisation beinhaltet. Zusätzlich kann man noch den Tensor

which contains the components of magnetization and polarization. In addition we may introduce the tensor

$$(D^{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ D^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ D^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35.11}$$

einführen, der die Komponenten der dielektrischen Verschiebung und des Magnetfeldes enthält. Dann lassen sich die Gleichungen

which contains the components of the dielectric displacement and of the magnetic field. Then the equations

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \tag{35.12}$$

zu

may be combined to

$$D = F + 4\pi M \tag{35.13}$$

zusammenfassen.

.

Wir führen nun die beiden Vektoren

We now introduce the two vectors

$$\hat{P}^{\mu} = \frac{u_{\nu}}{c} M^{\mu\nu}, \qquad (\hat{P}^{\cdot}) = \left(\frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{P},\ \gamma(\mathbf{P} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{M})\right), \tag{35.14}$$

$$\hat{M}^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\frac{u_{\nu}}{c} M_{\kappa\lambda}, \qquad (\hat{M}^{\cdot}) = \left(\frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{M},\ \gamma(\mathbf{M} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{P})\right) \tag{35.15}$$

ein. Sie haben die Eigenschaft, dass sie auf der Vierergeschwindigkeit senkrecht stehen,

. They have the property that they are orthogonal to the four-velocity

$$u_{\mu}\hat{P}^{\mu} = 0, \quad u_{\mu}\hat{M}^{\mu} = 0. \tag{35.16}$$

Sie haben daher nur jeweils drei unabhängige Komponenten. Im Ruhesystem gilt

Thus they have only three independent components. In the rest system one has

$$\hat{P}^{\alpha} = M^{\alpha 0} = P^{\alpha}, \quad \hat{M}^{\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma} = M^{\alpha}. \tag{35.17}$$

Die Rücktransformation ergibt

Back transformation yields

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{c}(u^{\nu}\hat{P}^{\mu} - u^{\mu}\hat{P}^{\nu} + \epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}u_{\kappa}\hat{M}_{\lambda}). \tag{35.18}$$

Entsprechende Vektoren $\hat{E}$ und $\hat{B}$ können wir natürlich auch aus dem Feldstärke-Tensor F einführen. Wir müssen nur beachten, dass in F das $\mathbf{B}$ mit dem umgekehrten Vorzeichen im Vergleich zu $\mathbf{M}$ in M eingeht. Man kann daher

Corresponding vectors $\hat{E}$ und $\hat{B}$ may also be derived from the field tensor F. However, we have to note, that $\mathbf{B}$ enters in F with the opposite sign compared to $\mathbf{M}$ in M. Thus we introduce

$$\hat{E}^{\mu} = \frac{u_{\nu}}{c} F^{\mu\nu}, \qquad (\hat{E}^{\cdot}) = \left(\frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E},\ \gamma(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right), \tag{35.19}$$

$$\hat{B}^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\frac{u_{\nu}}{c} F_{\kappa\lambda}, \qquad (\hat{B}^{\cdot}) = \left(\frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{B},\ \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E})\right) \tag{35.20}$$

einführen. Auch hier gilt, dass $\hat{E}$ und $\hat{B}$ auf der Weltgeschwindigkeit orthogonal stehen,

. Also here one has that $\hat{E}$ and $\hat{B}$ are orthogonal to the world velocity,

$$u_{\mu}\hat{E}^{\mu} = 0, \quad u_{\mu}\hat{B}^{\mu} = 0 \tag{35.21}$$

und die Rücktransformation lautet

and the back transformation reads

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{c}(u^{\nu}\hat{E}^{\mu} - u^{\mu}\hat{E}^{\nu} + \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}u_{\kappa}\hat{B}_{\lambda}). \tag{35.22}$$

Für $\hat{D}$, $\hat{H}$ und den Tensor D erhält man zu (35.19) bis (35.22) analoge Beziehungen.

For $\hat{D}$, $\hat{H}$ and the tensor D one obtains relations analogous to those from (35.19) to (35.22).

35.c Lagrange-Funktion

Wir wollen nun die L -Funktion für diesen Festkörper einführen. Zunächst betrachten wir die Ankopplung an das elektromagnetische Feld. In Abschnitt 27 hatten wir den Beitrag $-\frac{1}{c}A^{\mu}j_{\mu}$. Nun besteht der Ladungs-Strom aus dem freien Anteil sowie dem Polarisations- und Magnetisierungsstrom (Abschnitt 14),

35.c Lagrangean Function

Now we wish to introduce the L an for the solid. First we consider the coupling to the electromagnetic field. In section 27 we had the contribution $-\frac{1}{c}A^{\mu}j_{\mu}$. The charge current consists of a free contribution as well as the polarization and magnetization current (section 14),

$$\rho = \rho_\mathrm{f} - \operatorname{div}\mathbf{P}, \tag{35.23}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\mathrm{f} + \mathbf{j}_\mathrm{P} + \mathbf{j}_\mathrm{M} = \mathbf{j}_\mathrm{f} + \dot{\mathbf{P}} + c \operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{35.24}$$

was wir nun

which reads now

$$j^\mu = j^\mu_\mathrm{f} + c\partial_\nu M^{\mu\nu} \tag{35.25}$$

schreiben können. Damit erhalten wir für die L - -Dichte den Beitrag

. Thus we obtain the contribution

$$-\frac{1}{c}A^\mu j_{\mathrm{f}\mu} - A^\mu \partial_\nu M_\mu{}^\nu \tag{35.26}$$

Man kann zur L -Dichte eine vollständige Ableitung hinzufügen ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern. Wir fügen $\partial_\nu(A^\mu M_\mu{}^\nu)$ hinzu und erhalten damit den Kopplungsterm

to the L an density. One may add a complete derivative to the L an density without changing the equations of motion. We add $\partial_\nu(A^\mu M_\mu{}^\nu)$ and obtain the coupling term

$$-\frac{1}{c}A^\mu j_{\mathrm{f}\mu} + \partial_\nu A^\mu M_\mu{}^\nu = -\frac{1}{c}A^\mu j_{\mathrm{f}\mu} + \frac{1}{2}F_{\nu\mu}M^{\mu\nu}. \tag{35.27}$$

Hierzu kommt dann noch der Beitrag für den Festkörper $L_\mathrm{el}(\partial\xi, M)$, so dass wir insgesamt die L - -Dichte

Additionally we have a contribution for the solid $L_\mathrm{el}(\partial\xi, M)$ so that the complete L an density reads

$$L = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_{\mathrm{f}\mu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + L_\mathrm{el}(\partial\xi, M) \tag{35.28}$$

erhalten. Wir haben den Beitrag für die Massen der freien Ladungen weggelassen. Durch Variation des elektrischen Potentials A erhält man

. We have omitted the contribution for the masses of the free charges. The variation of the electric potentials A yields

$$\frac{\partial L}{\partial A^\nu} - \partial^\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}\right) = -\frac{1}{c}j_{\mathrm{f}\nu} + \partial^\mu\left(\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{c}j_{\mathrm{f}\nu} + \frac{1}{4\pi}\partial^\mu D_{\mu\nu} = 0. \tag{35.29}$$

Dies sind die M -Gleichungen (14.19), (14.20) in Materie mit freien Ladungen und Strömen.

These are M 's equations (14.19), (14.20) in matter with free charges and currents.

Als nächstes betrachten wir die Bewegungsgleichung für M. Da keine Ableitungen von M auftreten, lautet sie

Next we consider the equation of motion for M. It reads, since no derivatives of M appear,

$$\frac{\partial L}{\partial M_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu} + \frac{\partial L_\mathrm{el}}{\partial M_{\mu\nu}} = 0. \tag{35.30}$$

Sie beschreibt Magnetisierung und Polarisation in Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes. Setzen wir etwa

It describes magnetization and polarization as function of the electro-magnetic field. If we put

$$L_\mathrm{el} = \frac{1}{2\chi_\mathrm{e}}\hat{P}^\mu\hat{P}_\mu + \frac{1}{2\hat{\chi}_\mathrm{m}}\hat{M}^\mu\hat{M}_\mu \tag{35.31}$$

an, so folgt

then we obtain

$$\frac{\partial L}{\partial M_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\chi_\mathrm{e}}\left(\frac{u^\nu}{c}\hat{P}^\mu - \frac{u^\mu}{c}\hat{P}^\nu\right) + \frac{1}{2\hat{\chi}_\mathrm{m}}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\frac{u_\kappa}{c}\hat{M}_\lambda. \tag{35.32}$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit u_ν/c, so folgt

If we multiply this equation by u_ν/c, then we find

$$\frac{u_\nu}{c}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\chi_\mathrm{e}}\hat{P}^\mu. \tag{35.33}$$

Wir finden also

Thus we obtain

$$\hat{P}^\mu = \chi_\mathrm{e}\frac{u_\nu}{c}F^{\mu\nu} = \chi_\mathrm{e}\hat{E}^\mu, \tag{35.34}$$

was im Ruhesystem auf $P^\alpha = \chi_e E^\alpha$ hinausläuft; χ_e ist also die elektrische Suszeptibilität. Ähnlich finden wir durch Multiplikation der Gleichung (35.32) mit $\frac{1}{2}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\frac{u^\kappa}{c}$

which in the rest system yields $P^\alpha = \chi_e E^\alpha$; thus χ_e is the electric susceptibility. Similarly we find by multiplication of equation (35.32) with $\frac{1}{2}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\frac{u^\kappa}{c}$

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\frac{u^\kappa}{c}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\hat{\chi}_m}\hat{M}_\lambda. \tag{35.35}$$

Damit haben wir

Therefore we have

$$\hat{M}_\lambda = -\hat{\chi}_m\frac{1}{2}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\frac{u^\kappa}{c}F^{\mu\nu} = \hat{\chi}_m\hat{B}_\lambda. \tag{35.36}$$

Dies ergibt im Ruhesystem $M^\alpha = \hat{\chi}_m B^\alpha$. Damit ist $\hat{\chi}_m = \chi_m/(1+4\pi\chi_m)$. χ_m ist die auf H bezogene Suszeptibilität, während $\hat{\chi}_m$ auf B bezogen ist. Im Allgemeinen finden wir durch Einsetzen in (35.18)

This yields $M^\alpha = \hat{\chi}_m B^\alpha$ in the rest system. Therefore one has $\hat{\chi}_m = \chi_m/(1+4\pi\chi_m)$. χ_m is the susceptibility with respect to H, whereas $\hat{\chi}_m$ is related to B. In general one finds by insertion into (35.18)

$$M^{\mu\nu} = \frac{\chi_e}{c}(u^\nu\hat{E}^\mu - u^\mu\hat{E}^\nu) + \frac{\hat{\chi}_m}{c}\epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}u_\kappa\hat{B}_\lambda. \tag{35.37}$$

Durch Auswerten von $M^{0\alpha}$ und $M^{\alpha\beta}$ findet man

The evaluation of $M^{0\alpha}$ and $M^{\alpha\beta}$ yields

$$\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E} + (\chi_e + \hat{\chi}_m)\gamma^2\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{c}), \tag{35.38}$$

$$\mathbf{M} = \hat{\chi}_m\mathbf{B} - (\chi_e + \hat{\chi}_m)\gamma^2\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}). \tag{35.39}$$

Falls $\chi_e + \hat{\chi}_m = 0$, was $\epsilon\mu = 1$ entspricht und damit einer Lichtgeschwindigkeit in Materie, die gleich der im Vakuum ist, folgt $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ und $\mathbf{M} \propto \mathbf{B}$, ansonsten mischen die beiden Polarisationen.

If $\chi_e + \hat{\chi}_m = 0$, which corresponds to $\epsilon\mu = 1$ and thus to a velocity of light in matter which agrees with that in vacuum, then $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ and $\mathbf{M} \propto \mathbf{B}$ follows, otherwise both polarizations mix.

35.d Erhaltungs-Größen

35.d Conserved Quantities

35.d.α Energie-Impuls-Tensor

35.d.α Energy-Momentum Tensor

Im Folgenden werden wir die freien Ladungen weglassen, $\rho_f = 0$, $\mathbf{j}_f = \mathbf{0}$. Wir betrachten nun wieder den Energie-Impuls-Tensor. Für den kanonischen Energie-Impuls-Tensor erhält man

In the following we will omit the free charges, $\rho_f = 0$, $\mathbf{j}_f = \mathbf{0}$. Now we consider again the energy-momentum tensor. For the canonical energy-momentum tensor one obtains

$$\begin{aligned} T_c^{\mu\nu} &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^\kappa)}\partial^\mu A^\kappa + \sum_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\xi^i)}\partial^\mu\xi^i - \eta^{\mu\nu}L \\ &= -\frac{1}{4\pi}\partial^\mu A^\kappa D^\nu{}_\kappa + \sum_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\xi^i)}\partial^\mu\xi^i - \eta^{\mu\nu}L. \end{aligned} \tag{35.40}$$

Weiter folgt

Further one has

$$\hat{\psi}^{\mu\kappa\nu} = -\frac{1}{4\pi}A^\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\kappa A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi}A^\mu D^{\kappa\nu} \tag{35.41}$$

und

and

$$\psi^{\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{4\pi}A^\mu D^{\kappa\nu}. \tag{35.42}$$

Damit erhalten wir den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor

Thus we obtain the symmetric energy-momentum tensor

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_{\mathrm{c}}^{\mu\nu} + \partial_\kappa \psi^{\mu\nu\kappa} \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{\mu}{}_{\kappa} D^{\kappa\nu} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \xi^i)} \partial^\mu \xi^i - \eta^{\mu\nu} L \end{aligned} \tag{35.43}$$

Speziell für Impulsdichte und Energiestromdichte folgt

In particular for momentum-density and energy-density we obtain

$$c g_{\mathrm{s}\alpha} = \frac{1}{c} S_\alpha = T^{0\alpha} = \frac{1}{4\pi} F^{0}{}_{\kappa} D^{\kappa\alpha} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \xi^i)} \partial^0 \xi^i. \tag{35.44}$$

Im lokalen Ruhesystem der Materie ist $\partial^0 \xi^i = 0$. Damit folgt für dieses System

In the local rest system of matter one has $\partial^0 \xi^i = 0$. Thus for this system one obtains

$$c\mathbf{g}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{c}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{35.45}$$

Für die Energiedichte finden wir

We find for the energy-density

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \xi^i)} \partial^0 \xi^i - L \tag{35.46}$$

mit

with

$$L = \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} + L_{\mathrm{el}} \tag{35.47}$$

und

and

$$L_{\mathrm{el}} = L_{\mathrm{el}}(\mathbf{P} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}) - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{P}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{M}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M}. \tag{35.48}$$

Damit folgt für die Energiedichte im ruhenden System

Thus we obtain for the energy-density in the rest system

$$u = T^{00} = u(\mathbf{P} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}) + \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{D} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{B} \right) \tag{35.49}$$

in Übereinstimmung mit (15.2).

in agreement with (15.2).

35.d.β Quasi-Impuls

35.d.β Quasi Momentum

Die Bewegungs-Gleichungen für die elastischen Verschiebungen lauten

The equations of motion for the elastic displacements read

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \xi^i)} \right) = 0. \tag{35.50}$$

Hierbei tritt kein Term $\partial L/\partial \xi^i$ auf, wenn das elastische Medium homogen ist. Im Falle einer Inhomogenität müsste man eine explizite ξ-Abhängigkeit berücksichtigen. Für ein homogenes Medium aber hat (35.50) die Form einer Kontinuitätsgleichung mit der Dichte $\partial L/\partial(\partial_0 \xi^i)$. Wir verwenden nun die L -Invarianz von L, das heißt $\Delta^{0\alpha} = \Delta^{\alpha 0}$ (34.48), wobei wir aus (34.49)

Here no term $\partial L/\partial \xi^i$ appears if the elastic matter is homogeneous. One had to consider an explicit ξ-dependence in case of inhomogeneity. For a homogeneous medium eq. (35.50) has the form of an equation of continuity with density $\partial L/\partial(\partial_0 \xi^i)$. We make now use of the L invariance of L, that is of $\Delta^{0\alpha} = \Delta^{\alpha 0}$ (34.48), which yields

$$\Delta^{\mu\nu} = \sum_i \partial^\mu \xi^i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \xi^i)} + F^{\mu}{}_{\kappa} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\kappa)} + 2M^{\mu}{}_{\kappa} \frac{\partial L}{\partial M_{\nu\kappa}}. \tag{35.51}$$

erhalten. Die Ableitung nach $M_{\nu\kappa}$ verschwindet, Gl. (35.30). Damit folgt dann

with (34.49). The derivative with respect to $M_{\nu\kappa}$ vanishes, eq. (35.30). Thus one obtains

$$\sum_i \partial^\alpha \xi^i \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \xi^i)} = \sum_i \partial^0 \xi^i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \xi^i)} + \frac{1}{4\pi}\left(F^0_{\ \kappa} D^{\kappa\alpha} - F^\alpha_{\ \kappa} D^{\kappa 0}\right). \tag{35.52}$$

Im Ruhesystem verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Der zweite Term ergibt

The first term on the right hand side vanishes in the rest system. The second term yields

$$\frac{1}{4\pi}\left(F^0_{\ \kappa} D^{\kappa\alpha} - F^\alpha_{\ \kappa} D^{\kappa 0}\right) = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H} - \mathbf{D}\times\mathbf{B})_\alpha = (-\mathbf{E}\times\mathbf{M} + \mathbf{B}\times\mathbf{P})_\alpha \tag{35.53}$$

Im nicht verzerrten System ($\xi^i = x^i$) erhält man damit den Ausdruck (35.53) als erhaltene Dichte. Dieses Ergebnis beruht auf der Homogenität der Materie, nicht auf der Homogenität des Raumes. Man spricht hier auch von der Quasi-Impulsdichte. Subtrahiert man diesen Ausdruck von der Impuls-Dichte (35.45) so bleibt $\mathbf{D}\times\mathbf{B}$ als erhaltene Größe.

In the undistorted System ($\xi^i = x^i$) the expression (35.53) is a conserved density. This result rests on the homogeneity of matter not on that of space. It is called quasi-momentum density. If one subtracts this expression from the momentum density (35.45) then $\mathbf{D}\times\mathbf{B}$ remains as conserved quantity.

Aufgabe Man leite (35.38) und (35.39) dadurch her, dass man die Felder **E** und **B** zunächst in das Ruhesystem transformiert, dort **P** und **M** bestimmt und diese wieder in das ursprüngliche System zurücktransformiert.

Exercise Derive (35.38) and (35.39) by first transforming the fields **E** und **B** into the rest system, then determining **P** und **M** in this system and finally transforming back into the original system.