K

Metrik der allgemeinen Relativitätstheorie

Metric of General Theory of Relativity

36 Gravitations-Zeitdilatation

36.a Lichtquant im Gravitationsfeld

Wir wollen hier einen Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie betrachten, der sich elementar herleiten lässt, nämlich den unterschiedlichen Gang von Uhren im Gravitationspotential. Die Aussage ist, dass Uhren in verschiedenen Entfernungen eines massiven Körpers unterschiedlich rasch gehen, weiter entfernt schneller, näher daran langsamer. Dies ist ein Effekt, der beim H -K -Experiment bereits beobachtet wurde. Bei diesem Experiment ließ man Caesium-Atomuhren im Flugzeug um die Erde fliegen (J. C. H and R. E. K , Science 177, 166 (1972)). Dabei kann man einmal die Zeitdilatation auf Grund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten in Bezug auf den Erdmittelpunkt beobachten, aber der Effekt, dass Uhren in verschiedenen Höhen unterschiedlich gehen, ist von der gleichen Größenordnung. Diesen zweiten Effekt wollen wir nun erklären.

Wir geben zwei Erklärungen: Die erste macht Gebrauch von der Erhaltung der Energie. (Zwar gilt in der allgemeinen Relativitätstheorie der Satz von der Erhaltung der Energie nicht mehr generell; in einem Raum, der außen hinreichend flach wird, gilt er aber trotzdem. Wir brauchen daher diesen Einwand nicht zu beachten.) Fällt ein Körper der Masse m um die Höhe h in einem Gravitationsfeld der Beschleunigung g, so gewinnt er $\delta E = mgh$ an kinetischer Energie. Dies gilt zumindest für Massen einer Geschwindigkeit $v \ll c$.

36 Gravitational Time Dilatation

36.a Light Quantum in the Gravitational Field

Here we will consider an effect of the general theory of relativity, which can be derived in an elementary way, namely, the different behaviour of clocks in a gravitational potential. The statement is that clocks at different distances from a massive body run differently fast, those at further distance faster, the closer ones slower. This is an effect which had been observed in the H -K experiment. In this experiment cesium atomic beam clocks were carried in an airplane around the earth (J.C. H and R. E. K , Science 177, 166 (1972)). In this experiment one can observe time dilatation due to different velocities of the airplanes with respect to the center of the earth; but the effect that clocks run differently in different gravitational potentials is of the same order of magnitude. We will now explain this second effect.

We give two explanations: The first one uses the conservation of energy. (Actually, the theorem of conservation of energy does not hold generally in the general theory of relativity. If however, the space becomes sufficiently flat at large distances then it is still valid. Therefore we need not consider this objection.) If a body of mass m falls the height h in a field of gravitation of acceleration g, then it gains $\delta E = mgh$ of kinetic energy. This holds at least for masses of velocity $v \ll c$.

Das hat zur Konsequenz, dass auch Lichtquanten beim Fallen im Gravitationsfeld Energie gewinnen und beim Aufsteigen gegen das Feld Energie verlieren. Wäre das nicht der Fall, so könnte man ein Perpetuum mobile bauen, indem man Teilchen und Antiteilchen fallen und unten in Lichtquanten zerstrahlen lässt. Diese lässt man nach oben fliegen und bildet wieder das Teilchen-Antiteilchen-Paar, wobei man dann dem System die gewonnene potentielle Energie entnehmen könnte.

Da sich die Energien aller Massen um $\delta E = mgh = \frac{gh}{c^2}E$ verändern, muss dies auch für Lichtquanten gelten, das heißt wir finden für ein Lichtquant der Energie $E = \hbar\omega$

As a consequence, light quanta will gain energy in falling in the field of gravitation and they loose energy while climbing against the field. If this were not true, then one could construct a perpetuum mobile by letting particles and anti-particles fall in the gravitational field, and having them irradiated into light quanta below. These could now move up and recombine to a particle anti-particle pair, where one could extract the gained potential energy from the system.

Since the energies of all masses are changed by $\delta E = mgh = \frac{gh}{c^2}E$, the same has to hold for light quanta, that is we find for light quanta of energy $E = \hbar\omega$

$$\delta\omega = \frac{\delta E}{\hbar} = \frac{gh}{c^2}\frac{E}{\hbar} = \frac{gh}{c^2}\omega. \tag{36.1}$$

Dieser Verlust an Frequenz beim Verlassen eines Gravitationsfeldes ist als Rotverschiebung im Gravitationsfeld bekannt. Sie lässt sich zum Beispiel mit dem M¨ -Effekt messen. Der Frequenzverlust bei einem Höhenunterschied von etwa 20 m genügt bereits. Vergleichen wir nun den Gang zweier Atomuhren unten und oben mit einem Höhenunterschied h, dann beobachtet man oben, dass die Frequenz der unteren Uhr um $\delta\omega$ kleiner ist. Die obere Uhr geht also rascher um einen Faktor

This loss of frequency while leaving a gravitational field is known as the red shift in a gravitational field. It can be measured by means of the M¨ effect. A loss of frequency at a height of about 20 m is already sufficient. Thus if we compare the course of two atomic clocks down and up at a difference of height h, then one observes that the frequency of the lower clock is smaller by $\delta\omega$. The upper clock is thus faster by a factor of

$$1 + \frac{\delta\omega}{\omega} = 1 + \frac{gh}{c^2}. \tag{36.2}$$

36.b Äquivalenz-Prinzip

Die allgemeine Relativitätstheorie bedient sich nicht der Quantentheorie und damit der Beziehung $E = \hbar\omega$. Sie führt aber das Äquivalenz-Prinzip ein. Dieses Prinzip sagt aus, dass sich ein Bezugssystem, das sich frei unter der Gravitationskraft bewegt, wie ein Inertialsystem verhält. Nehmen wir also an, wir betrachten unser System aus einem frei fallenden Fahrstuhl. Eine untere Uhr sei zu einem bestimmten Zeitpunkt bezogen auf den Fahrstuhl in Ruhe und strahle mit der Frequenz ω nach oben. Bis dieses Licht bei der oberen Uhr angekommen ist, vergeht die Zeit $t = h/c$. Betrachtet von unserem frei fallenden Fahrstuhl bewegen sich Erde und Uhren nach der Zeit t mit der Geschwindigkeit $v = gt$ nach oben. Ein Beobachter an der oberen Uhr wird also eine Dopplerverschiebung um die Frequenz $\delta\omega = \omega v/c$ beobachten (für das schwache Gravitationsfeld, das wir hier betrachten, genügt es im Unterabschnitt 25.e nur den Beitrag linear in β zu betrachten). Damit folgt eine Dopplerverschiebung von

36.b Principle of Equivalence

The general theory of relativity does not make use of quantum theory, i.e. it does not use the relation $E = \hbar\omega$. Instead it uses the principle of equivalence. This principle says that a system of reference which moves freely in the gravitational field behaves like a system of inertia. Let us assume we consider our system from a freely falling elevator. A lower clock be at rest relative to the elevator at a certain time and radiates upwards with frequency ω. It takes the time $t = h/c$ until the light arrives at the upper clock. During that time the earth and the upper clock have gained the velocity $v = gt$ upwards as seen from the elevator. Thus an observer at the upper clock will observe a Doppler shift by the frequency $\delta\omega = \omega v/c$ (for the weak gravitational field we consider here it is sufficient to consider in subsection 25.e only the contribution linear in β). Thus one obtains the Doppler shift

$$\delta\omega = \frac{gh}{c^2}\omega, \tag{36.3}$$

was mit dem oben gewonnenen Ergebnis übereinstimmt.

which agrees with the result obtained above.

36.c Gekrümmter Raum und allgemeine Relativitätstheorie

Wir könnten diese Zeit-Dilatation dadurch berücksichtigen, dass wir die Metrik dahingehend verändern, dass η_{00} eine Funktion des Gravitations-Potentials wird. Bedenken wir nun, dass sich mehrere Massen mit ihrem Gravitations-Potential gegeneinander bewegen können und in deren Ruhesystem η_{00} ortsabhängig wird, dann kommen wir nicht umhin, in einem Inertialsystem, in dem sich Massen bewegen, zu erlauben, dass auch die anderen Komponenten des metrischen Tensors von denen durch η gegebenen abweichen. Daher erlaubt man eine allgemeine, von Ort und Zeit (x) abhängige Metrik

36.c Curved Space and General Theory of Relativity

We could consider this time dilatation by changing the metric so that η_{00} becomes a function of the gravitational potential. If we take into account that several masses can move against each other with their gravitational potential against and that in their rest system η_{00} becomes space dependent then we are bound to allow also the other components of the metric tensor to deviate from the components of η. Thus one allows a general metric depending on the spacetime position (x)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{36.4}$$

Für eine solch allgemeine Metrik ist der Raum nicht mehr eben. Vielmehr betrachtet die allgemeine Relativitätstheorie die Welt als einen gekrümmten vierdimensionalen Raum.

Nun wird aber die Metrik $g_{\cdot\cdot}$ zu einem dynamischen Feld. Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Geodäten (Linie mit extremalem $\int ds$), wobei sich das metrische Feld g aus der Massenverteilung (genauer aus dem Energie-Impuls-Tensor) ergibt, ähnlich wie man das elektromagnetische Feld aus Ladungs- und Stromverteilung erhält. Dabei kann man genauso wie für das elektromagnetische Feld eine L -Funktion einführen, so dass die Wirkung unter Variation des Feldes extremal wird. Diese L -Funktion beschreibt einerseits die Kopplung an alle anderen Felder. Dies wird zum Beispiel dadurch erreicht, dass man die L -Funktion durch die kovarianten Komponenten der Felder und die Metrik $g^{\cdot\cdot}$ beschreibt.

Dazu tritt aber noch ein Anteil der L -Funktion, der nur $g_{\cdot\cdot}$ enthält, genauso wie das elektromagnetische Feld in der M -Theorie einen freien Anteil hat, der die elektromagnetischen Wellen beschreibt. Hier wird dieser Anteil durch die Krümmung des Raumes gegeben und erlaubt zum Beispiel Gravitationswellen. Dieses Konzept werden wir nun ausarbeiten.

John Wheeler drückte es so aus: *Die Raumzeit schreibt der Materie die Bewegung vor. Die Materie schreibt der Raumzeit die Krümmung vor.*

For such a general metric spacetime is no longer flat. Rather the general theory of relativity considers the world as a curved four-dimensional space.

Now the metric $g_{\cdot\cdot}$ becomes a dynamical field. A mass point moves along a geodesic line (line of extremal $\int ds$), whereas the metric field g is obtained from the mass distribution (more precisely the energy-momentum tensor) in a similar way as one obtains the electromagnetic field from charge and current distributions. Similar as for the electromagnetic field one introduces a L an so that the action becomes extremal under variation of the field. On the one hand this L an describes the coupling to all other fields. This can be achieved for example by expressing the L an in terms of the covariant components of the fields and by the metric $g^{\cdot\cdot}$.

The L an function has in addition a contribution which contains only $g_{\cdot\cdot}$ similarly as the electromagnetic field in M ian theory has a free contribution which describes the electromagnetic waves. Here the contribution is given by the curvature of space and allows for gravitational waves. This concept has now to be elaborated.

John Wheeler phrased it that way: *Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.*

37 Die Metrik

37 The Metric

37.a Grundidee und Metrik

37.a Basic Idea and Metric

Zur Beschreibung der Physik im gekrümmten Raum führen wir Koordinaten x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ mit der Metrik

In order to describe physics in a curved space we introduce coordinates x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ with the metric

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \tag{37.1}$$

ein, die die Entfernungsverhältnisse festlegt. Bei der Festlegung wird verlangt, dass für die Ausbreitung des Lichts nach wie vor $ds^2 = 0$ gilt. Die Wahl der Koordinaten ist einigermaßen willkürlich. Wir wollen aber verlangen, dass der metrische Tensor g in der Regel zweimal nach den Koordinaten differenzierbar ist. Im Gegensatz zur speziellen Relativitätstheorie hängt die Metrik g aber vom Ort ab. Nur im Fall eines ebenen Raumes kann man Koordinaten x einführen, für die g unabhängig vom Ort ist. Offensichtlich kann man g symmetrisch wählen, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Eine derartige Beschreibung einer (im Allgemeinen) beliebig dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Metrik bezeichnet man als R sche Geometrie. Diese Geometrie werden wir in den nächsten Abschnitten entwickeln.

which specifies the relationships of the distances. In fixing the metric it is required as before that for the propagation of light $ds^2 = 0$ still holds. The choice of the coordinates is to a large extend arbitrary. We require, however, that the metric tensor g is normally twice differentiable with respect to the coordinates. In contrast to the special theory of relativity the metric g depends on the position. Only in a flat space it is possible to introduce coordinates x for which the g are independent of the position. Obviously g can be chosen symmetrically $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Such a description of an (in general) arbitrary dimensional manifold with metric is called a R ian geometry. This geometry will be developed in the next sections.

Der metrische Tensor hängt von der Wahl der Koordinaten x ab. Wählen wir einen anderen Satz von Koordinaten x', so gilt

The metric tensor depends on the choice of coordinates x. If we choose a different set of coordinates x' then we obtain

$$ds^2 = g'_{\kappa\lambda} dx'^\lambda dx'^\kappa \tag{37.2}$$

mit

with

$$g'_{\kappa\lambda} = A^\mu{}_\kappa A^\nu{}_\lambda g_{\mu\nu} \qquad A^\mu{}_\kappa = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}, \tag{37.3}$$

$$g_{\mu\nu} = B^\kappa{}_\mu B^\lambda{}_\nu g'_{\kappa\lambda} \qquad B^\kappa{}_\mu = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}. \tag{37.4}$$

Dabei verstehen wir unter $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}$ die partielle Ableitung von x^μ nach x'^κ, wobei die anderen Komponenten von x' festgehalten werden. Wir beobachten, dass die Matrizen $A = \frac{\partial x}{\partial x'}$ und $B = \frac{\partial x'}{\partial x}$ invers zueinander sind,

Thereby $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}$ denotes the partial derivative of x^μ with respect to x'^κ where the other components of x' are fixed. We observe that the matrices $A = \frac{\partial x}{\partial x'}$ and $B = \frac{\partial x'}{\partial x}$ are inverse to each other,

$$A^\mu{}_\kappa B^\kappa{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \quad B^\kappa{}_\mu A^\mu{}_\lambda = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} = \delta^\kappa{}_\lambda \tag{37.5}$$

mit dem Kronecker-δ.

with the Kronecker-δ.

Wir betrachten einige Beispiele:

Now we consider a few examples:

37.a.α Ebene Polarkoordinaten

37.a.α Flat polar coordinates

Als erstes Beispiel betrachten wir den ebenen zweidimensionalen Raum in Polarkoordinaten (r, ϕ)

As a first example we consider the flat two-dimensional space in polar coordinates (r, ϕ)

$$x^1 = r\cos\phi, \quad x^2 = r\sin\phi. \tag{37.6}$$

Wir nehmen an, dass (x^1, x^2) kartesische Koordinaten des zweidimensionalen ebenen Raums sind. Dann ist $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Für die Polarkoordinaten folgt dann

We assume that (x^1, x^2) are Cartesian coordinates of the two-dimensional flat space. Then $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. For the polar coordinates we obtain

$$A^1{}_r = \cos\phi, \qquad A^1{}_\phi = -r\sin\phi, \tag{37.7}$$

$$A^2{}_r = \sin\phi, \qquad A^2{}_\phi = r\cos\phi \tag{37.8}$$

und damit der metrische Tensor

and thus the metric tensor

$$g'_{rr} = A^\mu{}_r A^\nu{}_r g_{\mu\nu} = 1, \tag{37.9}$$

$$g'_{r\phi} = A^\mu{}_r A^\nu{}_\phi g_{\mu\nu} = 0, \tag{37.10}$$

$$g'_{\phi\phi} = A^\mu{}_\phi A^\nu{}_\phi g_{\mu\nu} = r^2. \tag{37.11}$$

37.a.β Kugelkoordinaten

37.a.β Spherical Coordinates

Für Kugelkoordinaten

For spherical coordinates

$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi, \tag{37.12}$$

$$x^2 = r\sin\theta\sin\phi, \tag{37.13}$$

$$x^3 = r\cos\theta \tag{37.14}$$

im ebenen Raum, das heißt mit der Metrik $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ erhält man

in flat space that is with the metric $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ one obtains

$$g'_{rr} = 1, \quad g'_{\theta\theta} = r^2, \quad g'_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta, \tag{37.15}$$

während alle gemischten Komponenten des Tensors verschwinden. Betrachten wir jedoch die Kugeloberfläche mit festem r, so stellt der Raum parametrisiert durch θ und ϕ eine gekrümmte Fläche dar.

whereas all mixed components of the tensor vanish. If we consider the surface of the sphere with fixed r then the space parametrized by θ and ϕ constitutes a curved area.

37.a.γ Rotierendes Koordinatensystem

37.a.γ Rotating frame of reference

Wir betrachten ein rotierendes Koordinatensystem im ebenen Raum

We consider a rotating frame of reference in a flat space

$$x'^1 = x^1\cos\omega t - x^2\sin\omega t, \tag{37.16}$$

$$x'^2 = x^1\sin\omega t + x^2\cos\omega t, \tag{37.17}$$

$$x'^3 = x^3, \tag{37.18}$$

$$x'^0 = ct = x^0. \tag{37.19}$$

Es folgt dann

This yields

$$x^1 = x'^1\cos\omega t + x'^2\sin\omega t, \tag{37.20}$$

$$\mathrm{d}x^1 = \cos\omega t\,\mathrm{d}x'^1 + \sin\omega t\,\mathrm{d}x'^2 + \frac{\omega}{c}(-x'^1\sin\omega t + x'^2\cos\omega t)\mathrm{d}x'^0, \tag{37.21}$$

$$x^2 = -x'^1\sin\omega t + x'^2\cos\omega t, \tag{37.22}$$

$$\mathrm{d}x^2 = -\sin\omega t\,\mathrm{d}x'^1 + \cos\omega t\,\mathrm{d}x'^2 + \frac{\omega}{c}(-x'^1\cos\omega t - x'^2\sin\omega t)\mathrm{d}x'^0, \tag{37.23}$$

$$(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 = (\mathrm{d}x'^1)^2 + (\mathrm{d}x'^2)^2 + 2\frac{\omega}{c}(x'^2\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^0 - x'^1\mathrm{d}x'^2\mathrm{d}x'^0) + \frac{\omega^2}{c^2}((x'^1)^2 + (x'^2)^2)(\mathrm{d}x'^0)^2 \tag{37.24}$$

und mit $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2$ erhalten wir

and we obtain with $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2$

$$
\begin{aligned}
g'_{00} &= 1 - \frac{\omega^2}{c^2}((x'^1)^2 + (x'^2)^2), && (37.25)\\
g'_{01} &= -\frac{\omega}{c}x'^2 = g'_{10}, && (37.26)\\
g'_{02} &= \frac{\omega}{c}x'^1 = g'_{20}, && (37.27)\\
g'_{11} &= g'_{22} = g'_{33} = -1. && (37.28)
\end{aligned}
$$

Alle anderen Komponenten von g' verschwinden.

All other components of g' vanish.

Nach diesen Beispielen setzen wir unsere allgemeinen Überlegungen fort. Wir fordern, dass die Metrik einen positiven Eigenwert und drei negative hat. Dann ist es möglich, eine Transformation der x durchzuführen, für die das System lokal den metrischen Tensor

After these examples we continue our general considerations. We require that the metric has one positive and three negative eigenvalues. Then it is possible to perform a transformation of the x so that the system locally has the metric tensor

$$
\eta_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (37.29)
$$

der speziellen Relativitätstheorie hat. Ein solches Koordinatensystem nennt man G sch. Dies ist an einem vorgegebenen Punkt möglich. Wie wir sehen werden, ist es jedoch nicht überall möglich, wenn der Raum gekrümmt ist.

of the special theory of relativity. Such a coordinate system is called G an. This is possible at a given point. However, it is not possible everywhere if the space is curved.

Um zu sehen, dass wir diese Transformation für einen vorgegebenen Punkt durchführen können, unterwerfen wir g zunächst einer orthogonalen Transformation, die g diagonalisiert,

In order to see that the transformation can be performed at a given point we first subject g to an orthogonal transformation which diagonalizes g,

$$
g = ODO^{\mathrm{T}}, \qquad (37.30)
$$

wobei O eine orthogonale Matrix und D eine diagonale Matrix ist. Dabei können wir O so wählen, dass der erste Eigenwert positiv, die drei anderen negativ sind, indem wir im Zweifelsfalle an O eine Permutation anschließen, die selbst eine orthogonale Transformation ist. Hat D die Gestalt $D = \mathrm{diag}(d_0, -d_1, -d_2, -d_3)$, so erhalten wir mit $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{d_0}, \sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3})$

where O is an orthogonal matrix and D a diagonal matrix. We may choose O so that the first eigenvalue is positive and the three other eigenvalues are negative, with a possibly following permutation which itself is an orthogonal transformation. If D has the form $D = \mathrm{diag}(d_0, -d_1, -d_2, -d_3)$ then we obtain with $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{d_0}, \sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3})$

$$
g = OD'\eta(OD')^{\mathrm{T}} \qquad (37.31)
$$

und haben damit eine Transformation gefunden, die g auf die Form η bringt.

and have thus found a transformation which brings g into the form η.

(37.3) beschreibt eine Transformation von g nach g' der Form $g' = A^{\mathrm{T}}gA$ mit einer nicht-singulären Matrix A. Für solche Transformationen gilt auf Grund von S s Trägheitssatz für quadratische Formen, dass g und g' in der Anzahl ihrer positiven, ihrer negativen und ihrer verschwindenden Eigenwerte übereinstimmen.

(37.3) describes a transformation from g to g' of the form $g' = A^{\mathrm{T}}gA$ with a non-singular matrix A. For such transformations S 's law of inertia on quadratic forms says that g and g' agree in the number of their positive, negative and vanishing eigenvalues.

Gehen wir also von einer 4×4-Matrix g mit 1 positiven und 3 negativen Eigenwerten aus, so hat auch g' stets 1 positiven und 3 negative Eigenwerte.

Thus if the 4×4 matrix g has 1 positive and 3 negative eigenvalues then also g' will have 1 positive and 3 negative eigenvalues.

37.b Entfernungen und Zeitintervalle

37.b Distances and Time Intervals

Die Wahl der Koordinaten unseres Bezugssystems ist weitgehend willkürlich. Wir müssen daher feststellen, wie wir Entfernungen und Zeitintervalle bestimmen können.

The choice of the coordinates of our frame of reference is to a large extend arbitrary. Thus we have to find how we can determine distances and time intervals.

Wir wollen nun annehmen, wir haben Uhren, die sich entlang vorgegebener fest gehaltener Koordinaten x^1, x^2, x^3 bewegen. Dann folgt aus $\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0$, dass

We assume that we have clocks which move along given fixed coordinates x^1, x^2, x^3. Then from $\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0$ it follows, that

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 \tag{37.32}$$

gilt. Zwei Ereignisse auf demselben Raumpunkt liegen also die Zeitdauer

holds. Two events at the same space point are the time

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}}\mathrm{d}x^0 \tag{37.33}$$

auseinander. Dies ist die Eigenzeit für diesen Raumpunkt. Voraussetzung ist, dass $g_{00} > 0$, da sich sonst die Uhr oder ein materieller Punkt nicht längs dieser Linie bewegen könnte. Das schränkt die Wahl unserer Koordinaten etwas ein.

apart. This is the proper time for this space-point. Prerequisite is that $g_{00} > 0$, since otherwise a clock or a material point could not move along this line. This constrains the choice of our coordinates somehow.

Wir bestimmen nun den Abstand zwischen zwei Weltlinien (Uhren), die nahe beieinander liegen. Um ihren Abstand zu bestimmen, lassen wir einen Lichtstrahl von der einen Weltlinie $(x + \mathrm{d}x)$ zur anderen (x) laufen und wieder zurück. Es gilt dann für die Differenzen $\mathrm{d}x^\mu$ der beiden Weltlinien

Now we determine the distance between two world lines (clocks) which are close to each other. In order to determine their distance we have a light beam running from one world line $(x + \mathrm{d}x)$ to the other (x) and back. Then one obtains for the difference $\mathrm{d}x^\mu$ of both world lines

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta + 2g_{0\alpha}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^\alpha + g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 = 0, \tag{37.34}$$

Lösen wir die Gleichung nach $\mathrm{d}x^0$ auf, so finden wir

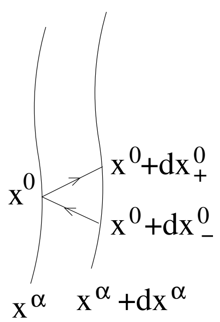
Solving the equation with respect to $\mathrm{d}x^0$ we obtain

$$\mathrm{d}x^0_\pm = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}\mathrm{d}x^\alpha \pm \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta})\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}\right). \tag{37.35}$$

Das $\mathrm{d}x^0$ gibt den Unterschied der Zeitanzeige der Uhr bei $(x + dx)$ und (x) an. Man erhält zwei Lösungen, da das Lichtsignal erst bei (x) oder erst bei $(x + \mathrm{d}x)$ gewesen sein kann.

The $\mathrm{d}x^0$ gives the difference in the readout of the clock at $(x + dx)$ and (x). One obtains two solutions since the light signal can be first at (x) or at $(x + \mathrm{d}x)$.

Wenn beide Lichtblitze zur gleichen Zeitanzeige x^0 bei (x) waren, dann gibt die Lösung mit dem positiven Vorzeichen vor der Wurzel das $\mathrm{d}x^0$ für das Licht von (x) nach $(x + \mathrm{d}x)$ an, die mit dem negativen Vorzeichen die für das Lichtsignal, das erst bei $(x + \mathrm{d}x)$ war und dann bei (x). Die gesamte auf der Uhr bei $(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha)$ angezeigte Zeit, bis das Lichtsignal zurückkehrt, ist also



If both light flashes are at (x) at the same time readout x^0 then the solution with the positive sign of the root yields the $\mathrm{d}x^0$ for the light from (x) to $(x + \mathrm{d}x)$ whereas that with the negative sign that for the light signal which was first at $(x + \mathrm{d}x)$ and then at (x). The total time until the light signal returns indicated at the clock at $(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha)$ is thus

$$\mathrm{d}x^0_+ - \mathrm{d}x^0_- = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta})\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}. \tag{37.36}$$

Das entsprechende Intervall der Eigenzeit erhalten wir durch Multiplikation mit $\sqrt{g_{00}}/c$ und die Entfernung $\mathrm{d}l$ der beiden Weltlinien durch eine weitere Multiplikation mit $c/2$.

The corresponding interval of the proper time is obtained by multiplication with $\sqrt{g_{00}}/c$ and the distance $\mathrm{d}l$ of both world lines by another multiplication with $c/2$.

$$\mathrm{d}l^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta. \tag{37.37}$$

Dieser Ausdruck erlaubt einem die Entfernungen durch die Differentiale der räumlichen Koordinaten auszudrücken. Man schreibt auch

This expression allows us to express the distances by the differentials of the spatial coordinates. One writes

$$\mathrm{d}l^2 = \gamma_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta, \quad \gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{37.38}$$

Diese Transformation entspricht lokal einer Transformation

This transformation corresponds locally to a transformation

$$x^{0\prime} = x^0 + \frac{g_{0\alpha}x^\alpha}{g_{00}}, \quad x^{\alpha\prime} = x^\alpha. \tag{37.39}$$

Dies führt auf

This yields

$$g'_{00} = g_{00}, \quad g'_{0\alpha} = 0, \quad g'_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}. \tag{37.40}$$

Allerdings gilt diese Transformation nur lokal, da sonst auch Ableitungen der $g_{..}$ zu berücksichtigen wären.

This transformation is only valid locally since otherwise also the derivatives of $g_{..}$ had to be taken into account.

Bei Durchführung dieser Transformation von x^0 auf x'^0 erhalten wir eine Art Synchronisierung zwischen Weltlinien. Diese Synchronisierung hängt allerdings von der Richtung der Weltlinien im Raum ab. Zusätzlich wird eine derartige Definition von Synchronisation zwischen zwei voneinander entfernten Weltlinien von dem Verbindungsweg zwischen den beiden Weltlinien abhängen, während in der speziellen Relativitätstheorie die Synchronisierung nur eine Frage des gewählten Inertialsystems war.

In performing the transformation from x^0 to x'^0 we obtain a synchronization between world lines. This synchronization depends on the orientation of the world lines in space time. Such a synchronization between two distant world lines will in addition depend on the line connecting the two world lines whereas in special relativity synchronization only depended on the choice of the system of inertia.

Allerdings kann man auch im gekrümmten Raum zumindest Bezugssysteme in endlich ausgedehnten Bereichen einführen, für die $g_{0\alpha} = 0$ ist. Für diese ist die Synchronisierung unabhängig von dem Verbindungsweg zwischen zwei Weltlinien. Man kann solch ein System einführen, indem man zunächst überall x^0 definiert, dann Weltlinien senkrecht zu den dreidimensionalen Hyperflächen $x^0 = \text{const}$ einführt und diesen schließlich geeignete Koordinaten x^α zuweist.

It is however possible to introduce frames of reference with $g_{0\alpha} = 0$ within finite regions in a curved space. The synchronization for these frames is independent of the line of connection between two world lines. Such a frame can be introduced defining first x^0 everywhere and then introducing world lines perpendicular to the hypersurfaces $x^0 = \text{const}$ and then assigning appropriate coordinates x^α to the world lines.

38 Vektoren und Tensoren

38.a Vektoren

Wir führen nun Vektoren ein. Vektoren sind in Raumzeit gerichtete Größen. Wir können an jedem Ort vier Basis-Vektoren $\mathbf{e}_\mu$ als die Vektoren einführen, um die sich der Ort $\mathbf{x}$ bei Änderung einer Koordinate x^μ ändert. Das heißt, $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{e}_\mu \mathrm{d}x^\mu$. Dementsprechend entwickeln wir einen Vektor $\mathbf{V} = \mathbf{e}_\mu V^\mu$. Offensichtlich hängen die Basis-Vektoren und damit auch die Komponenten V^μ von der Wahl der Koordinaten x ab. Gehen wir auf ein anderes Koordinatensystem x' über, so erhalten wir

38 Vectors and Tensors

38.a Vectors

Now we introduce vectors. Vectors are quantities directed in spacetime. At each position we can introduce four basis vectors $\mathbf{e}_\mu$ as vectors which indicate how the position $\mathbf{x}$ changes by varying one of the coordinates x^μ. Correspondingly we expand a vector $\mathbf{V} = \mathbf{e}_\mu V^\mu$. Obviously the basis vectors and therefore also the components V^μ depend on the choice of coordinates x. If we transform to a different system of coordinates x' then we obtain

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{e}'_\kappa \mathrm{d}x'^\kappa = \mathbf{e}'_\kappa \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \mathrm{d}x^\mu = \mathbf{e}_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{38.1}$$

Daraus folgt

Thus it follows that

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \mathbf{e}'_\kappa, \quad \mathbf{e}'_\kappa = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \mathbf{e}_\mu. \tag{38.2}$$

Da der Vektor $\mathbf{V}$ unabhängig von der Basis ist, muss gelten

Since the vector $\mathbf{V}$ is independent of the basis we have

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_\mu V^\mu = \mathbf{e}'_\kappa V'^\kappa. \tag{38.3}$$

Damit folgt für die Transformation der Komponenten von $\mathbf{V}$

Thus for the transformation of the components of $\mathbf{V}$ we obtain

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} V'^\kappa, \quad V'^\kappa = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} V^\mu. \tag{38.4}$$

Man bezeichnet diese Komponenten des Vektors als kontravariant. Wir haben hier die Vorstellung eines Ortsvektors $\mathbf{x}$ verwendet. Lässt sich ein gekrümmter Raum in einen höherdimensionalen ebenen Raum einbetten, so kann man diese Vorstellung anwenden, wie zum Beispiel bei der gekrümmten zweidimensionalen Oberfläche einer Kugel im dreidimensionalen Raum. Dann liegen die Vektoren $\mathrm{d}\mathbf{x}$ in der Tangentialebene an die Oberfläche. Im Allgemeinen werden wir aber nicht versuchen, den gekrümmten Raum in einen höherdimensionalen Raum einzubetten, zumal wir diesem höherdimensionalen Raum keine physikalischen Eigenschaften zuordnen würden. Dann können wir jedoch nach wie vor mit der Darstellung des Vektors durch seine Komponenten arbeiten. Wir bezeichnen dann eine vier-komponentige mit einem oberen Index gekennzeichnete Größe als Vektor, wenn sie sich gemäß (38.4) transformiert.

These components of the vector are called contravariant. We have used the picture of a position vector $\mathbf{x}$. If the curved space can be imbedded in a higher-dimensional flat space then one can use this picture as for example for the two-dimensional curved surface of a sphere in three-dimensional space. Then the vectors $\mathrm{d}\mathbf{x}$ lie in the tangential plane to the surface. However, in general we will not try to imbed the curved space in a higher-dimensional space all the more we would not assign any physical properties to this higher-dimensional space. However even then we can use the representation of the vector by its components. We denote a four-component quantity with an upper index as a vector if it transforms according to (38.4)

Neben den kontravarianten Komponenten führt man auch kovariante Komponenten ein

Besides the contravariant components one introduces covariant components

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu. \tag{38.5}$$

Auf Grund der Transformationseigenschaften von g und $V^{\cdot}$ folgt für die kovarianten Komponenten

Due to the transformation properties of g and $V^{\cdot}$ one obtains for the covariant components

$$V'_\kappa = g'_{\kappa\lambda} V'^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} V^\rho = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} g_{\mu\nu} \delta^\nu_\rho V^\rho = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} V_\mu \tag{38.6}$$

und ähnlich

and similarly

$$V_\mu = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} V'_\kappa. \tag{38.7}$$

Skalar-Produkt: Wir überzeugen uns leicht, dass das Produkt $A^\mu B_\mu$ zweier Vektoren invariant, das heißt ein Skalar ist,

Scalar product: One can easily convince oneself that the product $A^\mu B_\mu$ of two vectors is invariant that is a scalar,

$$A^\mu B_\mu = A^\mu \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} B'_\kappa = A'^\kappa B'_\kappa. \tag{38.8}$$

Das Produkt lässt sich auch $A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu$ schreiben. Setzen wir dx für A und B ein, so haben wir den Skalar ds^2,

The product may also be written $A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu$. If we insert dx for A and B then we obtain the scalar ds^2,

$$\mathrm{d}x^\mu g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}s^2. \tag{38.9}$$

Man beachte aber, dass $x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu$ in einem gekrümmten Raum keinen Sinn macht. dx ist ein Vektor, x aber nicht.

Note that $x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu$ does not make sense in a curved space. dx is a vector, but x is not.

Ähnlich wie man mittels $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$ den Vektor in kovarianter Darstellung aus dem in kontravarianter Darstellung erhält, schreibt man die Umkehrtransformation

Similarly as one obtains the vector in covariant representation from that in contravariant representation by means of $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$ one may write the inverse transformation

$$V^\nu = g^{\nu\mu} V_\mu. \tag{38.10}$$

Es muss dann wegen

Because of

$$V^\nu = g^{\nu\mu} V_\mu = g^{\nu\mu} g_{\mu\kappa} V^\kappa \tag{38.11}$$

$g^{\cdot\cdot}$ das Inverse von $g_{\cdot\cdot}$ sein, das heißt

$g^{\cdot\cdot}$ has to be the inverse of $g_{\cdot\cdot}$, that is

$$g^{\nu\mu} g_{\mu\kappa} = \delta^\nu_\kappa. \tag{38.12}$$

38.b Tensoren

38.b Tensors

Ähnlich wie für Vektoren kann man auch für Tensoren zweiter und höherer Stufe vorgehen. Es gilt dann etwa für einen Tensor C

Similarly as for a vector one may proceed with tensors of second or higher rank. For a tensor C one has, e.g.

$$C_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa} C^\kappa{}_\nu = g_{\nu\lambda} C_\mu{}^\lambda = g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} C^{\kappa\lambda}, \tag{38.13}$$

$$C^{\kappa\lambda} = g^{\kappa\mu} C_\mu{}^\lambda = g^{\lambda\nu} C^\kappa{}_\nu = g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} C_{\mu\nu}. \tag{38.14}$$

Man kann also die Indices mit Hilfe der Faktoren $g_{\cdot\cdot}$ und $g^{\cdot\cdot}$ herauf- und herunterziehen.

One can lower and lift the indices by means of factors $g_{\cdot\cdot}$ and $g^{\cdot\cdot}$.

Wir wollen nun noch den total antisymmetrischen Tensor einführen. Hierzu definieren wir zunächst wie in Abschnitt 33 die total antisymmetrische Größe $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ mit $\epsilon^{0123} = +1$ wie auch $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ mit $\epsilon_{0123} = -1$. Diese sind jedoch nicht invariant. Jedoch wird der invariante Tensor E dazu proportional sein,

We will now introduce the totally antisymmetric tensor. For this purpose we first introduce the totally antisymmetric quantity $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ with $\epsilon^{0123} = +1$ and $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ with $\epsilon_{0123} = -1$ as in section 33. However, these are not invariant. But the total invariant tensor E will be proportional to it.

$$E^{\mu\nu\kappa\lambda} = J(g)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{38.15}$$

wobei J noch von g abhängen wird. Wir bestimmen nun J. Dazu verwenden wir

where J depends on g. We now determine J. For this purpose we use

$$E^{0123} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^1}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^2}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^3}{\partial x'^\lambda}E'^{\mu\nu\kappa\lambda}. \tag{38.16}$$

Drücken wir nun $E'^{\cdots\cdot}$ durch $J'\epsilon^{\cdots\cdot}$ aus, so folgt

If we now express $E'^{\cdots\cdot}$ by $J'\epsilon^{\cdots\cdot}$ then we obtain

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}J' \tag{38.17}$$

Schreiben wir die Beziehung (37.3) als Matrix-Produkt, $g' = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) g \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{\mathrm{T}}$, so folgt mit dem Determinanten-Multiplikations-Satz

If we write the condition (37.3) as matrix product $g' = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) g \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{\mathrm{T}}$, then the determinant-multiplication theorem yields

$$\det g' = \det(\frac{\partial x}{\partial x'})^2 \det g. \tag{38.18}$$

Wir finden daher

Thus we obtain

$$J = \sqrt{\det g' / \det g}J', \tag{38.19}$$

Die Determinante von g ist negativ, da g eine ungerade Anzahl (drei) von negativen Eigenwerten hat. Daher wählen wir

The determinant of g is negative since g has an odd number (three) of negative eigenvalues. Thus we choose

$$J = \frac{1}{\sqrt{-g}}, \quad g := \det(g_{\cdot\cdot}). \tag{38.20}$$

Wir haben daher den invarianten Tensoren

Thus we have the invariant tensors

$$E^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \tag{38.21}$$

und

and

$$E_{\mu\nu\kappa\lambda} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \tag{38.22}$$

als vollständig antisymmetrische Tensoren.

as completely antisymmetric tensor.

Wir führen noch das Volumen-Element ein. Wir bemerken, dass

Finally we introduce the volume element. We note that

$$\sqrt{-g}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \sqrt{-g}\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\mathrm{d}x'^0\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2\mathrm{d}x'^3 = \sqrt{-g'}\mathrm{d}x'^0\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2\mathrm{d}x'^3 \tag{38.23}$$

ist. Dieser Ausdruck ist also forminvariant und wir bezeichnen ihn als das vierdimensionale Volumenelement

holds. This expression is form invariant, too, and we call it the four-dimensional volume-element.

39 Geodäten

39 Geodesic Lines

Wir fragen nun: Was ist die kürzeste oder genauer die extremale Verbindung zwischen zwei Raumzeitpunkten? Dazu müssen wir das Extremum von $\int \mathrm{d}s$ bestimmen. Parametrisieren wir diese Kurve mit einem Parameter λ, d.h. $x = x(\lambda)$, so geht es darum, das Extremum von $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\lambda G^{1/2}$ mit

Now we ask the question: What is the shortest or more precisely the extremal connection between two spacetime points? Thus we have to determine the extreme of $\int \mathrm{d}s$. If we parametrize the curve with a parameter λ, that is $x = x(\lambda)$, then we have to find the extreme of $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\lambda G^{1/2}$ with

$$G = g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{39.1}$$

zu bestimmen. Dabei steht der Punkt $\dot{}$ für die Ableitung nach λ. Wir betrachten das Problem zunächst für allgemeines G^n. Dann ergibt die Variation

. Here the dot $\dot{}$ stands for the derivative with respect to λ. For the moment we consider the problem for general G^n. Then the variation yields

$$\begin{aligned}
\delta \int \mathrm{d}\lambda G^n &= n \int \mathrm{d}\lambda G^{n-1} \delta G & (39.2)\\
&= n \int \mathrm{d}\lambda G^{n-1}(\partial_\kappa g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\, \delta x^\kappa + 2 g_{\mu\kappa}\dot{x}^\mu\, \delta\dot{x}^\kappa) & (39.3)\\
&= n \int \mathrm{d}\lambda \delta x^\kappa G^{n-1}\left((\partial_\kappa g_{\mu\nu} - 2\partial_\nu g_{\mu\kappa})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2 g_{\mu\kappa}\ddot{x}^\mu - 2\frac{n-1}{G}\dot{G} g_{\mu\kappa}\dot{x}^\mu\right) & (39.4)
\end{aligned}$$

mit

with

$$\dot{G} = \partial_\kappa g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\kappa + 2 g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \ddot{x}^\mu. \tag{39.5}$$

Hier und im Folgenden wird häufig $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ abgekürzt. Beim Übergang von (39.3) auf (39.4) haben wir eine partielle Integration durchgeführt. Für $n = 1$ verschwindet der $\dot{G}$-Term. Es bleibt dann die Gleichung

Here and in the following we often abbreviate $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$. In going from (39.3) to (39.4) an integration by parts has been performed. For $n = 1$ the $\dot{G}$ term disappears. Then only the equation

$$(\partial_\kappa g_{\mu\nu} - 2\partial_\nu g_{\mu\kappa})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2 g_{\mu\kappa}\ddot{x}^\mu = 0 \tag{39.6}$$

zu erfüllen. Setzt man diese Gleichungen in den Ausdruck für $\dot{G}$ ein, so findet man, dass $\dot{G} = 0$ bereits erfüllt ist. Daher stellen die Gleichungen (39.6) die Bestimmungsgleichungen für beliebige n und damit auch für die Geodäte, $n = 1/2$, dar.

has to be fulfilled. If one substitutes these equations into the expression for $\dot{G}$ then one finds that $\dot{G} = 0$ is already fulfilled. Thus the equations (39.6) are the conditional equations for arbitrary n and thus also for the geodesics, $n = 1/2$.

Tatsächlich sollte aber die Parametrisierung der Geodäten ($n = \frac{1}{2}$) durch λ beliebig sein. Das heißt, hat man einen Zusammenhang $\lambda(\lambda')$, so ist auch x dargestellt durch λ' Lösung. Das bedeutet aber, dass die Gleichung gegen diese Reparametrisierung invariant sein muss. Bezeichnen wir

In fact the parametrization of the geodesics ($n = \frac{1}{2}$) by λ should be arbitrary. That is, if we introduce a relation $\lambda(\lambda')$ then x represented by λ' should be a solution, too. This means that the equation has to be invariant against such a reparametrization. If we denote

$$G' = g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda'}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda'} = G\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}\right)^2, \tag{39.7}$$

so finden wir

then we find

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}\lambda'} &= \dot{x}^\kappa \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}, & (39.8)\\
\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}\lambda'^2} &= \ddot{x}^\kappa \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}\right)^2 + \dot{x}^\kappa \frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\lambda'^2}, & (39.9)\\
\frac{\mathrm{d}G'}{\mathrm{d}\lambda'} &= \dot{G}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}\right)^3 + 2G\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\lambda'^2}. & (39.10)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun analog die Variation $\delta\int \mathrm{d}\lambda' G'^n$ und drücken diese durch die Ableitungen nach λ aus, so ergeben sich Beiträge, die mit $(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'})^2$ multipliziert sind. Diese haben die gleiche Form wie in der Gleichung, die wir aus $\delta\int \mathrm{d}\lambda G^n$ hergeleitet haben. Daneben gibt es Terme, die die zweite Ableitung von λ nach λ' enthalten. Diese sind proportional zu $g_{\mu\kappa}\dot{x}^\mu(-2-4(n-1))$. Sie verschwinden also für $n = 1/2$. Damit sind die Gleichungen für $n = 1/2$ tatsächlich parametrisierungsinvariant. Die Darstellung für $n \neq 1/2$ hat die spezielle Eigenschaft, dass λ linear mit dem Abstand $\int \mathrm{d}s$ anwächst, denn $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\lambda G^{1/2} = G^{1/2}\lambda$, wobei G wegen $\dot{G} = 0$ konstant ist.

If we now consider analogously the variation $\delta\int \mathrm{d}\lambda' G'^n$ and express it by the derivatives of λ then we obtain contributions which are multiplied by $(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'})^2$. These have the same form as in the equation we have derived from $\delta\int \mathrm{d}\lambda G^n$. Besides there are terms which contain the second derivative of λ with respect to λ'. These are proportional to $g_{\mu\kappa}\dot{x}^\mu(-2-4(n-1))$. Thus they vanish for $n = 1/2$. Thus the equations are parametrization invariant, indeed. The representation for $n \neq 1/2$ has the special property that λ increases linearly with distance $\int \mathrm{d}s$, since $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\lambda G^{1/2} = G^{1/2}\lambda$, where G is constant due to $\dot{G} = 0$.

Wir können die Gleichung (39.6) nach Symmetrisierung in μ und ν auf der rechten Seite auch

We can write eq. (39.6) after symmetrization in μ and ν on the right hand side as

$$g_{\mu\kappa}\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\kappa\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{39.11}$$

mit dem C -Symbol

with the C symbol

$$\Gamma_{\kappa\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \tag{39.12}$$

schreiben. Wir führen auch

. We also introduce

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = g^{\lambda\kappa}\Gamma_{\kappa\mu\nu} \tag{39.13}$$

ein und schreiben

and write

$$\ddot{x}^\lambda = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \tag{39.14}$$

Das C -Symbol ist kein Tensor. Bilden wir nämlich

The C symbol is not a tensor. If we form

$$\begin{aligned}
\dot{x}^\kappa &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\dot{x}'^\lambda, &(39.15)\\
\ddot{x}^\kappa &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\ddot{x}'^\lambda + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\lambda \partial x'^\iota}\dot{x}'^\lambda\dot{x}'^\iota &(39.16)
\end{aligned}$$

und setzen die Bewegungsgleichung (39.6) ein

and insert the equation of motion (39.6)

$$\ddot{x}^\kappa = -\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\iota}\dot{x}'^\lambda\dot{x}'^\iota, \tag{39.17}$$

multiplizieren diese mit $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}$, und berücksichtigen, dass auch für $\ddot{x}'^\rho$ die entsprechende Bewegungsgleichung gilt, so folgt

multiply it by $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}$, and consider that the corresponding equation of motion holds for $\ddot{x}'^\rho$, then we obtain

$$\Gamma'^\rho{}_{\lambda\iota} = \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\iota}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\lambda \partial x'^\iota}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}. \tag{39.18}$$

Der zweite Term verhindert, dass sich das C - -Symbol wie ein Tensor transformiert.

The second term prevents the C symbol from transforming like a tensor.

Wir können nun mit der Transformation

With the transformation

$$x^\kappa - x^\kappa(P) = x'^\kappa - \frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}(P)x'^\mu x'^\nu \tag{39.19}$$

ein System x' generieren, in dem am Punkt $x(P)$ für die Geodäten $\ddot{x}'^\kappa = 0$ gilt. Wir haben $\Gamma(P) = \Gamma(x(P))$ abgekürzt. Dann folgt

we can generate a system x', where at the point $x(P)$ for the geodesic lines $\ddot{x}'^\kappa = 0$ holds. We have abbreviated $\Gamma(P) = \Gamma(x(P))$. Then it follows that

$$\dot{x}^\kappa = \dot{x}'^\kappa - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}(P)\dot{x}'^\mu x'^\nu, \tag{39.20}$$

$$\ddot{x}^\kappa = \ddot{x}'^\kappa - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}(P)(\dot{x}'^\mu \dot{x}'^\nu + \ddot{x}'^\mu x'^\nu). \tag{39.21}$$

Aus (39.14) und dieser Gleichung folgt, dass $\ddot{x}'$ am Ort P verschwindet,

From (39.14) and this equation it follows, that $\ddot{x}'$ vanishes at the position P.

$$\ddot{x}'^\kappa\Big|_P = 0. \tag{39.22}$$

Ein Massenpunkt, der nur der Gravitation unterworfen ist, erfährt daher am Ort P keine Beschleunigung. Wir sind daher in das Bezugssystem übergegangen, das am Ort P frei fällt, und haben damit lokal die Gravitationskraft eliminiert. Wir werden später sehen, dass es nicht möglich ist, in einem gekrümmten Raum überall Γ gleich Null zu setzen.

A mass point which is subject only to gravitation experiences no acceleration at point P. Thus we have transformed to the frame of reference which falls freely at point P; thus we have eliminated the local force of gravity. We will see later that it is not possible to put Γ equal to zero everywhere in space.

39.a Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

39.a Example: Flat polar coordinates

Für ebene Polarkoordinaten (siehe 37.a.α) erhalten wir

For flat polar coordinates (see 37.a.α) we obtain

$$\Gamma_{r\phi\phi} = -r, \qquad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r, \tag{39.23}$$

$$\Gamma_{\phi r\phi} = \Gamma_{\phi\phi r} = r, \qquad \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = \frac{1}{r}. \tag{39.24}$$

Die anderen C -Symbole verschwinden. Daraus folgen die Bewegungs-Gleichungen für die Geodäten

The other C symbols vanish. From this we obtain the equations for the geodesic lines

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2, \quad r^2\ddot{\phi} = -2r\dot{r}\dot{\phi}. \tag{39.25}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen eines freien Teilchens in Polarkoordinaten, wenn man die durch den Punkt $\dot{}$ angegebene Ableitung als Zeitableitung betrachtet. Abgesehen von Faktoren m ergibt die Integration der zweiten Gleichung die Konstanz des Drehimpulses

These are the equations of motion for a free particle in polar coordinates if one considers the derivative indicated by the dot $\dot{}$ as time derivative. Apart from the factor m the integration of the second equation yields the conservation of angular momentum

$$r^2\dot{\phi} = l. \tag{39.26}$$

Weiter sieht man, dass

Further one observes that

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = v^2 \tag{39.27}$$

erhalten ist, da

is conserved

$$(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)\dot{} = 2(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\phi}\ddot{\phi}) = 0, \tag{39.28}$$

wobei wir für die zweiten Ableitungen die Ausdrücke der Bewegungsgleichungen eingesetzt haben. Eliminiert man nun $\dot{\phi}$ mit (39.26) aus (39.27), so folgt

where we have substituted the expressions of the equations of motion for the second derivatives. If one eliminates $\dot{\phi}$ from (39.26) and (39.27) then one obtains

$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} = v^2. \tag{39.29}$$

Aus (39.26) und (39.29) folgt

From (39.26) and (39.29) one obtains

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{r\sqrt{v^2r^2 - l^2}}{l} \tag{39.30}$$

mit der Lösung

with the solution

$$r = \frac{l}{v\cos(\phi - \phi_0)}, \tag{39.31}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden in Polarkoordinaten.

This is the equation of a straight line in polar coordinates.

39.b Beispiel: Rotierendes Bezugssystem

39.b Example: Rotating Frame

Für das rotierende Bezugssystem findet man aus (37.a.γ) zunächst

For the rotating frame of reference we obtain from (37.a.γ) first

$$\Gamma_{100} = \frac{\omega^2}{c^2}x^1, \qquad \Gamma_{200} = \frac{\omega^2}{c^2}x^2, \tag{39.32}$$

$$\Gamma_{102} = \Gamma_{120} = -\frac{\omega}{c}, \qquad \Gamma_{201} = \Gamma_{210} = \frac{\omega}{c}. \tag{39.33}$$

Damit folgen aus (39.11) die Bewegungsgleichungen

With these Γs we obtain from (39.11) the equations of motion

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}((x^1)^2 + (x^2)^2)\right)\ddot{x}^0 - \frac{\omega}{c}x^2\ddot{x}^1 + \frac{\omega}{c}x^1\ddot{x}^2 = 0, \tag{39.34}$$

$$-\ddot{x}^1 - \frac{\omega}{c}x^2\ddot{x}^0 = -\frac{\omega^2}{c^2}x^1(\dot{x}^0)^2 + 2\frac{\omega}{c}\dot{x}^0\dot{x}^2, \tag{39.35}$$

$$-\ddot{x}^2 + \frac{\omega}{c}x^1\ddot{x}^0 = -\frac{\omega^2}{c^2}x^2(\dot{x}^0)^2 - 2\frac{\omega}{c}\dot{x}^0\dot{x}^1. \tag{39.36}$$

die nach

which can be solved for

$$\ddot{x}^0 = -2\frac{\omega^2}{c^2}\dot{x}^0(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2), \tag{39.37}$$

$$\ddot{x}^1 = \frac{\omega}{c}\dot{x}^0\left(\frac{\omega}{c}x^1\dot{x}^0 - 2\dot{x}^2 + 2\frac{\omega^2}{c^2}x^2(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2)\right), \tag{39.38}$$

$$\ddot{x}^2 = \frac{\omega}{c}\dot{x}^0\left(\frac{\omega}{c}x^2\dot{x}^0 + 2\dot{x}^1 - 2\frac{\omega^2}{c^2}x^1(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2)\right) \tag{39.39}$$

aufgelöst werden können. Im nichtrelativistischen Limes wird $\frac{\dot{x}^0}{c} \to 1$ und damit

We have $\frac{\dot{x}^0}{c} \to 1$ in the non-relativistic limit and thus

$$\ddot{x}^0 = O(\frac{\omega}{c}), \quad \ddot{x}^1 = \omega^2x^1 - 2\omega\dot{x}^2, \quad \ddot{x}^2 = \omega^2x^2 + 2\omega\dot{x}^1. \tag{39.40}$$

Der erste Term der Beschleunigungen $\ddot{x}^1$, $\ddot{x}^2$ ist die Zentrifugalbeschleunigung, der zweite die C -Beschleunigung.

The first term of the acceleration $\ddot{x}^1$, $\ddot{x}^2$ is the centrifugal acceleration, the second one the C acceleration.

40 Räumliche Differentiation

40 Differentiation in Spacetime

40.a Gradient von Skalaren

40.a Gradient of Scalars

Die Komponenten des Gradienten A eines Skalars Φ können geschrieben werden als

The components of the gradient A of a scalar ϕ can be written as

$$A_\mu = \partial_\mu \Phi. \tag{40.1}$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser Gradient ein Vierervektor ist, da er die Transformationseigenschaften eines Vektors hat,

One easily convinces oneself that this gradient is a four-vector since it has the transformation properties of a vector

$$A'_\kappa = \frac{\partial\Phi}{\partial x'^\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}A_\mu. \tag{40.2}$$

Offensichtlich gilt

Apparently one has

$$\mathrm{d}\Phi = A_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{40.3}$$

40.b Parallel-Verschiebung von Vektoren

40.b Parallel Displacement of vectors

Die räumliche Differentiation eines Vektors gestaltet sich etwas schwieriger. Um einen Vektor zu differenzieren, muss man ihn an zwei benachbarten Orten (x) und $(x + \mathrm{d}x)$ vergleichen. Dazu muss man den Vektor am Ort $(x + \mathrm{d}x)$ zunächst an den Ort (x) parallel verschieben und dann die Differenz zwischen dem parallel verschobenen Vektor und dem Vektor am Ort (x) betrachten.

In einem ebenen Raum, in dem man kartesische Koordinaten einführt, ändern sich die kartesischen Komponenten des Vektors durch die Parallel-Verschiebung nicht. In einem gekrümmten Raum können wir aber keine kartesischen Koordinaten einführen. Wir müssen uns also zunächst überlegen, wie wir die Parallel-Verschiebung durchführen.

Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine besteht darin, dass wir zur Parallelverschiebung am Ort $(x(P))$ auf das Koordinaten-System (x') übergehen, für das g' lokal konstant ist,

The spatial differentiation of a vector is more difficult. In order to differentiate a vector one has to compare it at two neighbouring positions (x) and $(x + \mathrm{d}x)$. In order to do this one has to displace the vector parallel from position $(x + \mathrm{d}x)$ to (x) and to consider the difference between the parallel displaced vector and the vector at position (x).

In a flat space in which one introduces Cartesian coordinates the Cartesian components of a vector are unaltered by the parallel displacement. But in a curved space we cannot introduce Cartesian coordinates. Therefore we have to consider first how to perform the parallel displacement.

There are various possibilities to do that. One possibility is to transform at the point $(x(P)$ to the frame of reference (x') for which g' is locally constant,

$$x^\kappa - x^\kappa(P) = x'^\kappa - \frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu + O(x'^3). \tag{40.4}$$

Wir erhalten dann nämlich

Then we obtain

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}g_{\kappa\lambda} = (\delta^\kappa_\mu - \Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}x'^\sigma)(\delta^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\tau}x'^\tau)g_{\kappa\lambda} + O(x'^2) \\
&= g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}x'^\sigma g_{\kappa\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\tau}x'^\tau g_{\mu\lambda} + O(x'^2) \\
&= g_{\mu\nu}(x(P)) + \partial_\kappa g_{\mu\nu}x'^\kappa - \Gamma_{\nu\mu\sigma}x'^\sigma - \Gamma_{\mu\nu\tau}x'^\tau + O(x'^2) \\
&= g_{\mu\nu}(x(P)) + (\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\kappa} - \Gamma_{\mu\nu\kappa})x'^\kappa + O(x'^2).
\end{aligned} \tag{40.5}$$

Da der Ausdruck in Klammern

$$\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\kappa} - \Gamma_{\mu\nu\kappa} = 0 \tag{40.6}$$

mit dem Γ aus (39.12) verschwindet, folgt $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} = 0$ an der Stelle $x = x(P)$ oder äquivalent $\ddot{x}' = 0$.
Umgekehrt bestimmt die Gleichung (40.6) auch eindeutig die Lösung (39.12). Schreiben wir nämlich

$$\begin{aligned}
\partial_\mu g_{\kappa\nu} &= \Gamma_{\nu\mu\kappa} + \Gamma_{\kappa\mu\nu}, && (40.7)\\
\partial_\nu g_{\kappa\mu} &= \Gamma_{\mu\nu\kappa} + \Gamma_{\kappa\mu\nu}, && (40.8)\\
\partial_\kappa g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\nu\mu\kappa} + \Gamma_{\mu\nu\kappa}, && (40.9)
\end{aligned}$$

(Wir haben verwendet, dass Γ wegen (40.4) in seinen hinteren Indices symmetrisch ist.) und addieren wir die beiden ersten Gleichungen und subtrahieren wir die letzte, so folgt (39.12). Daher ist bis zur Ordnung x'^2 (40.4) die einzige Transformation, die $g = g'$ und $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} = 0$ am Ort $x(P)$ erfüllt.
In dem Koordinatensystem (x') ändert also eine infinitesimale Parallel-Verschiebung die Komponenten A'^μ nicht.

Aus (40.4) folgt umgekehrt

$$x'^\mu = x^\mu - x^\mu(P) + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x^\nu - x^\nu(P))(x^\lambda - x^\lambda(P)) + O((x - x(P))^3). \tag{40.10}$$

Damit folgt dann

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu = A^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\partial_\nu((x^\kappa - x^\kappa(P))(x^\lambda - x^\lambda(P)))A^\nu + O((x-x(P))^2) = A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x^\lambda - x^\lambda(P))A^\nu + O((x-x(P))^2). \tag{40.11}$$

Da sich A'^μ bei einer infinitesimalen Parallel-Verschiebung des Vektors nicht verändert, erhält man für die Veränderung der Komponenten A^μ bei Parallel-Verschiebung um $\mathrm{d}x^\nu$ die Veränderung

$$\mathrm{d}_{\|}A^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}A^\kappa \mathrm{d}x^\nu. \tag{40.12}$$

Zum Vergleich von $A(x + \mathrm{d}x)$ und $A(x)$ müssen wir $A(x + \mathrm{d}x)$ um $-\mathrm{d}x$ verschieben. Daher erhält man für die Ableitung des Vektors A

$$D_\nu A^\mu = A^\mu{}_{;\nu} = A'^\mu{}_{;\nu} = \partial_\nu A'^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}A^\kappa. \tag{40.13}$$

Die rechte Seite gibt die Veränderung der μ-Komponente des kontravarianten Vektors bei Verschiebung in ν-Richtung an. Wir verwenden dabei sowohl die Bezeichnung $D_\nu A^\mu$ wie auch $A^\mu{}_{;\nu}$.

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass es sich dabei um eine kovariante Ableitung handelt, dass also $A^\mu{}_{;\nu}$ ein Tensor ist. Dazu gehen wir von

Since the expression in paranthesis (40.6) vanishes with the Γ from (39.12) one obtains $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} = 0$ at the position $x = x(P)$ or equivalently $\ddot{x}' = 0$.
On the other hand eq. (40.6) determines uniquely the solution (39.12). If we write (40.7–40.9)

(We have used that Γ is symmetrical in his last indices because of (40.4).) and add the first two equations and subtract the last one, then eq. (39.12) follows. Thus up to order x'^2 eq. (40.4) is the only transformation which fulfills $g = g'$ and $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} = 0$ at the position $x(P)$.

Thus in the system of coordinates (x') an infinitesimal parallel displacement does not change the components A'^μ.

On the other hand we obtain from (40.4) (40.10). Thus one obtains (40.11).

Since A'^μ does not change during an infinitesimal parallel displacement of a vector, one obtains for the change of the components A^μ during a parallel displacement by $\mathrm{d}x^\nu$ (40.12).

For the comparison of $A(x + \mathrm{d}x)$ and $A(x)$ we have to displace $A(x + \mathrm{d}x)$ by $-\mathrm{d}x$. Thus one obtains for the derivative of the vector A (40.13).

The right hand side gives the change of the μ-component of the contravariant vector due to the displacement in ν direction. We use both the notations $D_\nu A^\mu$ and $A^\mu{}_{;\nu}$.

Now we would like to convince ourselves that we have obtained a covariant derivative, that is that $A^\mu{}_{;\nu}$ is a tensor. To show this we start from

$$\begin{aligned}
A^\kappa{}_{;\nu} &= \partial_\nu A^\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}A^\mu\\
&= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\partial'_\sigma\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}A'^\lambda\right) + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}A'^\lambda\\
&= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\partial'_\sigma A'^\lambda + \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\sigma \partial x'^\lambda} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\right)A'^\lambda
\end{aligned} \tag{40.14}$$

aus. Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\iota}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}$ und erhalten

. We multiply this expression by $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\iota}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}$ and obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\iota}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}A^\kappa{}_{;\nu} &= \partial'_\iota A'^\rho + \left(\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\iota \partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\iota}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\right)A'^\lambda \\ &= \partial'_\iota A'^\rho + \Gamma'^\rho{}_{\lambda\iota}A'^\lambda = A'^\rho{}_{;\iota}, \end{aligned} \tag{40.15}$$

wobei wir die Transformations-Formel (39.18) für Γ verwendet haben.

where we have used the transformation formula (39.18) for Γ.

Wir betrachten nun die Ableitung des Vektors in kovarianter Darstellung,

Now we consider the derivative of the vector in covariant representation,

$$A_{\mu;\nu} = g_{\mu\lambda}A^\lambda{}_{;\nu} = g_{\mu\kappa}\partial_\nu A^\kappa + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\nu}A^\kappa = \partial_\nu(g_{\mu\kappa}A^\kappa) + \left(-\partial_\nu g_{\mu\kappa} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\nu}\right)A^\kappa \tag{40.16}$$

und erhalten durch Einsetzen des expliziten Ausdrucks für Γ

and obtain by replacing the explicite expression for Γ

$$A_{\mu;\nu} = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}A_\kappa. \tag{40.17}$$

Für die Parallel-Verschiebung eines Vektors in kovarianten Komponenten gilt dann

Then one obtains for the parallel displacement of a vector in covariant components

$$\mathrm{d}_\| A_\mu = +\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}A_\kappa \mathrm{d}x^\nu. \tag{40.18}$$

Die partielle Ableitung nach dem Ort wird auch häufig nur durch Anhängen des entsprechenden Index nach einem Komma angezeigt,

The partial derivative with respect to the position is often indicated by adding the corresponding index after a comma.

$$\partial_\mu\Phi = \Phi_{,\mu}, \quad A^\mu{}_{;\nu} = A^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}A^\kappa, \quad A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}A_\kappa. \tag{40.19}$$

Differenzieren längs einer Weltlinie Gegeben sei eine Weltlinie, längs deren sich zum Beispiel ein Massenpunkt bewegt. Betrachtet man die Veränderung eines Vektors A längs dieser Weltlinie, die man etwa durch ihre Eigenzeit τ parametrisiert, so erhält man

Derivative along a world-line Consider a world-line along which a mass point is moving. Considering the change of a vector A along this world-line, which should be parametrized by its proper time τ, one obtains

$$D_\tau A^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}D_\nu A^\mu = u^\nu A^\mu{}_{;\nu} = \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\partial_\nu A^\mu + u^\nu\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}A^\kappa = \frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\tau} + u^\nu\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}A^\kappa. \tag{40.20}$$

Man beachte, dass $D_\tau A^\mu$ ein kontravarianter Vektor ist, aber $\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ nicht, obwohl wir annehmen, dass A^μ ein Vierervektor ist, und τ ein Skalar ist. Die kovarianten Komponenten dieses Vektors sind

Note that $D_\tau A^\mu$ is a contravariant vector, but $\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ is not such a vector despite the fact that A^μ is a four-vector and τ is a scalar. The covariant components of this vector are

$$D_\tau A_\mu := \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}D_\nu A_\mu = u^\nu A_{\mu;\nu} = \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\partial_\nu A_\mu - u^\nu\Gamma_{\kappa\mu\nu}A^\kappa = \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau} - u^\nu\Gamma_{\kappa\mu\nu}A^\kappa. \tag{40.21}$$

Setzen wir speziell für den Vektor A die Weltgeschwindigkeit ein, so folgt

If we put the world-velocity for the vector A then we obtain

$$D_\tau u^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}u^\nu u^\kappa, \quad D_\tau u_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\kappa\lambda}u^\kappa u^\lambda. \tag{40.22}$$

Für Geodäten sind diese Ableitungen $D_\tau u^\mu$ und $D_\tau u_\mu$ gleich Null.

These derivatives $D_\tau u^\mu$ and $D_\tau u_\mu$ vanish for geodesic lines.

40.c Ableitungen von Produkten und Tensoren

40.c Derivatives of Products and Tensors

Bei der Ableitung eines Produkts von Vektoren muss die Veränderung eines jeden Faktors berücksichtigt werden. Man findet

When taking the derivative of a product of vectors one has to take into account the alteration of each factor. One obtains

$$(A^\mu B^\nu)_{;\kappa} = A^\mu{}_{;\kappa}B^\nu + A^\mu B^\nu{}_{;\kappa} \tag{40.23}$$

Entsprechend gilt dann für Tensoren

Correspondingly one obtains for tensors

$$A^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = A^{\mu\nu}{}_{,\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}A^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\kappa\lambda}A^{\mu\lambda}, \tag{40.24}$$
$$A^{\mu}{}_{\nu;\kappa} = A^{\mu}{}_{\nu,\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}A^{\lambda}{}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}A^{\mu}_{\lambda}, \tag{40.25}$$
$$A_{\mu\nu;\kappa} = A_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}A_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}A_{\mu\lambda}. \tag{40.26}$$

Allgemein gilt die Produkt-Regel

In general one has the product rule

$$(A^{\because}_{\because}B^{\because}_{\because})_{;\kappa} = A^{\because}_{\because;\kappa}B^{\because}_{\because} + A^{\because}_{\because}B^{\because}_{\because;\kappa}. \tag{40.27}$$

Wir betrachten noch einige Spezialfälle:
Im Falle der Kontraktion erhält man

Now we consider a few special cases:
In the case of contraction one obtains

$$A^{\mu}_{\mu;\kappa} = \partial_\kappa A^{\mu}_{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}A^{\lambda}_{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}A^{\mu}_{\lambda}. \tag{40.28}$$

Tauschen wir in einem der beiden letzten Terme die Summations-Indices μ und λ, so sehen wir, dass

If we exchange in one of the last terms the summation indices μ and λ, then we see that

$$A^{\mu}_{\mu;\kappa} = \partial_\kappa A^{\mu}_{\mu} \tag{40.29}$$

bleibt. Das hatten wir auch erwartet, da A^{μ}_{μ} ein Skalar ist. Weiter kann man sich durch Einsetzen davon überzeugen, dass

is left. This was to be expected since A^{μ}_{μ} is a scalar. Further one can convince oneself by substitution that

$$g^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = 0, \quad \delta^{\mu}_{\nu;\kappa} = 0, \quad g_{\mu\nu;\kappa} = 0. \tag{40.30}$$

Die Verallgemeinerung der Divergenz im gekrümmten Raum ist

The generalization of the divergency in a curved space is

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = A^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\kappa}A^{\kappa}. \tag{40.31}$$

Wir formen um

We rewrite

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\kappa} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\mu\kappa} = g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(g_{\nu\kappa,\mu} + g_{\mu\nu,\kappa} - g_{\mu\kappa,\nu}\right) = g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\kappa}. \tag{40.32}$$

Dabei haben sich der erste und der dritte Term gekürzt, wie man sieht, wenn man in einem der beiden die Summations-Indices μ und ν vertauscht. Die verbliebene Summe in (40.32) kann man durch

Here the first and the third term cancel which can easily be seen, if one exchanges the summation indices μ and ν in one of these terms. The remaining sum in (40.32) kann be expressed by

$$g := \det(g_{..}) \tag{40.33}$$

ausdrücken. Leiten wir die Determinante g nach $g_{\mu\nu}$ ab, so verbleibt die entsprechende Minore. Andererseits sind die Komponenten der inversen Matrix ($g^{..}$) gerade durch die Minoren dividiert durch die Determinante gegeben. Es gilt also

. If we take the derivative of the determinant g with respect to $g_{\mu\nu}$ then we obtain the corresponding minor. On the other hand the components of the inverse matrix $g^{..}$ is given by the minors divided by the determinant. Thus one has

$$\mathrm{d}g = gg^{\mu\nu}\mathrm{d}g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\mathrm{d}g^{\mu\nu}, \tag{40.34}$$

wobei letztere Beziehung durch Bildung des Differentials von $g_{..}g^{..} = \mathbb{1}$ folgt. Damit folgt dann

where the last relation follows from taking the derivative of $g_{..}g^{..} = \mathbb{1}$. Then one obtains

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\kappa} = \partial_\kappa \ln\sqrt{-g} \tag{40.35}$$

und

and

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}A^{\mu}\right). \tag{40.36}$$

Für den antisymmetrischen Tensor $A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ erhalten wir

We obtain for the antisymmetric tensor $A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}, \tag{40.37}$$

wegen der Symmetrie $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$.

because of the symmetry $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$.

Aufgabe: Man zeige, dass die kovariante Ableitung des Tensors E in (38.21) verschwindet,

Exercise: Show that the covariant derivative of the tensor E in (38.21) vanishes,

$$E^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{;\rho} = 0. \tag{40.38}$$

40.d Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

40.d Example: Flat Polar Coordinates

Wir betrachten nun die Ableitung in Polarkoordinaten. Mit den C -Symbolen aus (39.a) erhalten wir

Now we consider the derivatives in polar coordinates. With the C symbols from (39.a) we obtain

$$A^r{}_{;r} = \partial_r A^r, \tag{40.39}$$

$$A^\phi{}_{;r} = \partial_r A^\phi + \frac{1}{r}A^\phi, \tag{40.40}$$

$$A^r{}_{;\phi} = \partial_\phi A^r - rA^\phi, \tag{40.41}$$

$$A^\phi{}_{;\phi} = \partial_\phi A^\phi + \frac{1}{r}A^r. \tag{40.42}$$

Bei Verschiebung in Radial-Richtung bleibt die Radial-Komponente erhalten. Die Komponente in ϕ-Richtung ändert sich, da die Länge des Vektors $\mathbf{e}_\phi$ von r abhängt. Bei Verschiebung in ϕ-Richtung ändern sich die Richtungen der Basis-Vektoren. Von dort rührt der jeweils zweite Term auf der rechten Seite der Gleichungen her.

The radial component is conserved during the displacement in radial direction. The component in ϕ direction changes since the length of the vector $\mathbf{e}_\phi$ depends on r. A displacment in ϕ direction changes the directions of the basis vectors. Thus we have the second term on the right-hand side of the equations.

40.e Ableitungen im ebenen und eingebetteten Raum

40.e Derivatives in Flat and Imbedded Space

Greifen wir in einem ebenen Raum auf die Basisvektoren zurück und führen die dualen Vektoren

In a flat space we may resort to basis vectors and introduce the dual vectors

$$\mathbf{e}_\kappa = g_{\kappa\mu}\mathbf{e}^\mu \tag{40.43}$$

ein, so dass

so that

$$(\mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}^\mu) = \delta^\mu_\kappa, \quad (\mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_\lambda) = g_{\kappa\lambda} \tag{40.44}$$

gilt, so finden wir generell

holds, then we find in general

$$\mathbf{e}^\kappa \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = A^\kappa{}_{;\nu}\mathrm{d}x^\nu = \Big(\partial_\nu A^\kappa + A^\mu(\mathbf{e}^\kappa \cdot \partial_\nu \mathbf{e}_\mu)\Big)\mathrm{d}x^\nu, \tag{40.45}$$

Also gilt

Thus

$$A^\kappa{}_{;\nu} = A^\kappa{}_{,\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}A^\mu \tag{40.46}$$

mit

holds with

$$\Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} = (\mathbf{e}^\kappa \cdot \partial_\nu \mathbf{e}_\mu). \tag{40.47}$$

Gehen wir über auf

If we pass over to

$$\Gamma_{\lambda\nu\mu} = g_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} \tag{40.48}$$

mit

with

$$\Gamma_{\lambda\nu\mu} = (\mathbf{e}_\lambda \cdot \partial_\nu \mathbf{e}_\mu), \tag{40.49}$$

dann finden wir, dass

then we find that

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu(\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\mu) = (\partial_\nu \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_\lambda \cdot \partial_\nu \mathbf{e}_\mu) = \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}. \tag{40.50}$$

Weiterhin ist Γ in seinen beiden hinteren Indices symmetrisch ist, was man unmittelbar aus

Furthermore Γ is symmetrical in its last indices, which follows immediately from

$$\Gamma_{\lambda\nu\mu} = (\mathbf{e}_\lambda \cdot \partial_\nu \partial_\mu \mathbf{x}) \tag{40.51}$$

entnehmen kann. Damit stellt (40.50) wieder unsere Gleichung (40.6) dar.

. Thus (40.50) represents again our eq. (40.6).

Diese Argumente können auch für einen gekrümmten Raum verwendet werden, der in einen höher-dimensionalen Raum eingebettet ist. Für unsere ursprüngliche Herleitung haben wir eine derartige Einbettung nicht benötigt. Tatsächlich würden wir diesem höher-dimensionalen Raum keine physikalische Bedeutung zuschreiben.

These arguments can also be applied to a curved space imbedded in a higher-dimensional flat space. For our original derivation we did not need such an imbedding. Actually we would not ascribe a physical meaning to such a higher-dimensional space.

Dies muss unterschieden werden von Betrachtungen, die den vier-dimensionalen Raum um weitere Dimensionen (geringer Ausdehnung) ergänzen. Dort ist dann der so gewonnene höher-dimensionale Raum selbst gekrümmt.

This has to be distinguished from considerations where the four-dimensional space is supplemented by further dimensions (of small extension). There this higher-dimensional space is curved itself.