L

RIEMANNsche Krümmung und EINSTEIN-Gleichung

RIEMANNian Curvature and EINSTEIN's Equation

41 RIEMANNscher Krümmungstensor

41 RIEMANNian Curvature Tensor

41.a Definition und Darstellung

41.a Definition and Representation

Wir betrachten nun die zweite Ableitung eines Vektors nach dem Ort in verschiedene Richtungen. Aus (40.17)

We consider now the second covariant derivative of a vector with respect to the position in different directions. From (40.17)

$$A_{\mu;\nu} = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda \qquad (41.1)$$

folgt

we obtain

$$\begin{aligned} A_{\mu;\nu;\kappa} &= (A_{\mu;\nu})_{;\kappa} = \partial_\kappa A_{\mu;\nu} - \Gamma^\iota{}_{\mu\kappa} A_{\iota;\nu} - \Gamma^\iota{}_{\nu\kappa} A_{\mu;\iota} \\ &= \partial_\nu \partial_\kappa A_\mu - \partial_\kappa \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\kappa A_\lambda - \Gamma^\iota{}_{\mu\kappa} \partial_\nu A_\iota + \Gamma^\iota{}_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda{}_{\iota\nu} A_\lambda - \Gamma^\iota{}_{\nu\kappa} \partial_\iota A_\mu + \Gamma^\iota{}_{\nu\kappa} \Gamma^\lambda{}_{\mu\iota} A_\lambda. \end{aligned} \qquad (41.2)$$

Vertauschen wir in diesem Ausdruck die beiden Ableitungen nach den Komponenten ν und κ, so finden wir, dass sie nicht übereinstimmen. Vielmehr bleibt die Differenz

If we exchange the two derivatives with respect to the components ν and κ, then we find that they do not agree. Rather there remains the difference

$$A_{\mu;\nu;\kappa} - A_{\mu;\kappa;\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} A_\lambda \qquad (41.3)$$

mit

with

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\iota{}_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda{}_{\iota\nu} - \Gamma^\iota{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\iota\kappa}. \qquad (41.4)$$

Die Größe R wird als R scher Krümmungstensor bezeichnet. Dass R ein Tensor ist, ergibt sich daraus, dass die linke Seite von (41.3) ein Tensor dritter Stufe und A auf der rechten Seite ein Vektor ist. Berücksichtigt man deren Transformationsverhalten, so ergibt sich, dass auch R ein Tensor ist.

The quantity R is called the R ian curvature tensor. R is a tensor since the left-hand side of (41.3) is a tensor of third order and A on the right hand-side is a vector. If one considers their transformation properties then it results that R is q tensor.

Das Auftreten der Differenz (41.3) rührt daher, dass die Parallel-Verschiebung in einem gekrümmten Raum vom Weg abhängt. Zu diesem Zweck verschieben wir einen Vektor A auf einer kleinen geschlossenen Schleife parallel und bestimmen die dadurch entstehende Drehung des Vektors. Unter Verwendung von (40.18) folgt

The appearance of the difference (41.3) comes from the fact, that in a curved space the parallel displacement depends on the path. For this purpose we move the vector A in a small closed loop parallel and determine the thereby emerging rotation of the vector. Using (40.18) one obtains

$$\oint \mathrm{d}_\parallel A_\mu = \oint \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) A_\lambda(x) \mathrm{d}x^\nu. \tag{41.5}$$

Ausgehend von einem Ort ($x(P)$) folgt in erster Ordnung in $\delta x = x - x(P)$

Starting from a position ($x(P)$) one obtains in first order in $\delta x = x - x(P)$

$$A_\mu(x) = A_\mu(P) + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) A_\lambda(P) \delta x^\nu. \tag{41.6}$$

Setzen wir das in obiges Integral ein, so folgt

By insertion into the integral given above one obtains

$$\begin{aligned}
\oint \mathrm{d}_\parallel A_\mu(x) &= \oint (\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}(P) + \delta x^\kappa \partial_\kappa \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P))(A_\lambda(P) + \Gamma^{\lambda'}{}_{\kappa'\lambda}(P) A_{\lambda'}(P) \delta x^{\kappa'}) \mathrm{d}x^\nu && (41.7)\\
&= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) A_\lambda(P) \oint \mathrm{d}x^\nu \\
&+ (\partial_\kappa \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) A_\lambda(P) + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P) \Gamma^{\lambda'}{}_{\kappa\lambda}(P) A_{\lambda'}(P)) \oint \delta x^\kappa \mathrm{d}x^\nu + \oint O(\delta x^2) \mathrm{d}x. && (41.8)
\end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet für eine geschlossene Schleife. Das zweite Integral ist die Komponente $f^{\kappa\nu}$ des von der Schleife eingeschlossenen Flächenelements. (In einem ebenen Raum wäre das die Projektion der Fläche auf die κ, ν-Ebene). Das Vorzeichen hängt vom Umlaufsinn ab. f ist ein antisymmetrischer Tensor

The first integral vanishes for a closed loop. The second integral is the component $f^{\kappa\nu}$ of the surface element enclosed by the loop (In a flat space this would be the projection onto the κ, ν-plain). The sign depends on the direction of circulation. f is an antisymmetric tensor

$$f^{\kappa\nu} = \oint x^\kappa \mathrm{d}x^\nu = \oint \mathrm{d}(x^\kappa x^\nu) - \oint x^\nu \mathrm{d}x^\kappa = -f^{\nu\kappa}. \tag{41.9}$$

Damit erhalten wir

Thus we obtain

$$\oint \mathrm{d}_\parallel A_\mu(x) = (\partial_\kappa \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\iota{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\iota\kappa}) A_\lambda f^{\kappa\nu} \tag{41.10}$$

Berücksichtigen wir, dass f antisymmetrisch ist, so können wir auch

If we take into account that f is antisymmetric then we may write

$$\oint \mathrm{d}_\parallel A_\mu = \frac{1}{2}(-\partial_\kappa \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa} - \Gamma^\iota{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\iota\kappa} + \Gamma^\iota{}_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda{}_{\iota\nu}) A_\lambda f^{\nu\kappa} = \frac{1}{2} R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} A_\lambda f^{\nu\kappa} \tag{41.11}$$

schreiben. Der Krümmungstensor gibt also an, wie sich ein Vektor bei Parallel-Verschiebung längs einer infinitesimalen Schleife verändert.

. The curvature tensor indicates how a vector changes during a parallel displacement along a closed infinitesimal loop.

41.b Symmetrien und Beziehungen

Auf Grund der Konstruktion ist R in seinen beiden hinteren Indices antisymmetrisch, $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = -R^\lambda{}_{\mu\kappa\nu}$. Weiterhin beschreibt $\oint \mathrm{d}_\parallel A_\mu$ eine infinitesimale Drehung des Vektors. Dabei bleibt die Länge des Vektors konstant. Daher muss die Differenz (41.11) auf A senkrecht stehen. Daraus folgt die Antisymmetrie von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ in den beiden ersten Indices λ und μ. Dies sieht man auch aus der Darstellung (vgl. D.1)

41.b Symmetries and Relations

Due to its construction R is antisymmetric in its two last indices, $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = -R^\lambda{}_{\mu\kappa\nu}$. Furthermore $\oint \mathrm{d}_\parallel A_\mu$ describes an infinitesimal rotation of the vector. The length of the vector stays constant. Thus the difference (41.11) has to be perpendicular to A. From this follows the antisymmetry of $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ in its two first indices λ und μ. This can also be seen from its representation (compare D.1)

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\iota} R^{\iota}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu g_{\mu\kappa}\right) + g_{\iota\pi}\left(\Gamma^{\iota}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\pi}{}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\iota}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\pi}{}_{\lambda\nu}\right). \tag{41.12}$$

Dieser Darstellung entnimmt man auch, dass R invariant ist gegen Vertauschung des vorderen Paars von Indices mit dem hinteren Paar. Wir haben damit die Symmetrie-Eigenschaften

One sees from this representation that R is invariant against the exchange the first two indices with the last two indices. Thus we have the symmetry relations

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \tag{41.13}$$

Weiterhin erkennt man leicht, dass auch die Identität

Further one can easily see that the identity

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} = 0 \tag{41.14}$$

besteht. Aus der Antisymmetrie folgt, dass die Komponenten mit vier oder drei gleichen Indices verschwinden. Treten die Indices μ und ν mit $\mu \neq \nu$ je zweimal auf, so gibt es eine unabhängige Komponente, in d Dimensionen gibt es davon $d(d-1)/2$. Insbesondere gibt es in $d = 2$ Dimensionen nur eine unabhängige Komponente. Tritt ein Index μ zweimal auf und die beiden anderen sind von ihm und untereinander verschieden, so gibt es dazu auch nur eine unabhängige Komponente. In d Dimension gibt es $d(d-1)(d-2)/2$. Damit hat man in drei Dimensionen insgesamt sechs unabhängige Komponenten. Schließlich reduziert sich für vier verschiedene Indices auf Grund der Symmetrierelationen die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf drei. Die Identität (41.14) reduziert sie dann auf zwei. Da es in d Dimensionen davon insgesamt $d(d-1)(d-2)(d-3)/24$ solche Index-Quadrupel gibt, hat man insgesamt

holds. From the antisymmetry follows that the components with four or three equal indices vanish. If both indices μ and ν with $\mu \neq \nu$ appear twice then there exists one independent component. In d dimensions there are $d(d-1)/2$ such components. In particular in $d = 2$ dimensions there is only one independent component. If one index μ appears twice and the two other ones are different from μ and different from each other, then there is only one independent component to them. In d dimensions there are $d(d-1)(d-2)/2$ of them. Thus in three dimensions there are in total six independent components. For four different indices one has three independent components due to the symmetry relations. Because of the identity (41.14) their number reduces to two. Since in d dimensions there are $d(d-1)(d-2)(d-3)/24$ such index quadruples, one has in total

$$\frac{d(d-1)}{2} + \frac{d(d-1)(d-2)}{2} + \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{12} = \frac{d^2(d^2-1)}{12} \tag{41.15}$$

unabhängige Komponenten. In vier Dimensionen sind das zwanzig unabhängige Komponenten. Schließlich gibt es noch die B -Identität

independent components. In four dimensions there are twenty independent components. Finally there is the B identity

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa;\rho} + R^{\lambda}{}_{\mu\kappa\rho;\nu} + R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu;\kappa} = 0. \tag{41.16}$$

Man kann diese Identität nachprüfen, indem man zunächst in ein Koordinaten-System geht, für das an einem Punkt P alle Γ verschwinden. An diesem Punkt ist dann

One can verify this identity by transforming to a coordinate frame where all Γ vanish at a point P. Then one has at this point

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa;\rho} = \partial_\nu\partial_\rho\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa} - \partial_\rho\partial_\kappa\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}. \tag{41.17}$$

Damit sieht man leicht, dass die B -Identität erfüllt ist. Da der Ausdruck auf der linken Seite eine tensorielle Größe ist, gilt sie auch in jedem anderen Koordinatensystem.

Thus one can easily see that the B identity is fulfilled. Since the expression on the left hand side is a tensorial quantity, the identity holds in every other coordinate frame, too.

Wir können die Identität (41.14) und die Bianchi-Identität (41.16) auch ausgehend von der Operator-Identität

We can also show the identity (41.14) and the B identity (41.16) starting from the operator identity

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\kappa\nu\mu} &= D_\kappa D_\nu D_\mu - D_\kappa D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu D_\kappa - D_\nu D_\kappa D_\mu + D_\mu D_\kappa D_\nu - D_\mu D_\nu D_\kappa \\
&= D_\kappa[D_\nu, D_\mu] + D_\nu[D_\mu, D_\kappa] + D_\mu[D_\kappa, D_\nu] && (41.18) \\
&= [D_\kappa, D_\nu]D_\mu + [D_\nu, D_\mu]D_\kappa + [D_\mu, D_\kappa]D_\nu && (41.19)
\end{aligned}$$

zeigen. Wenden wir $\mathcal{D}_{\kappa\nu\mu}$ aus (41.18) auf einen Skalar $\Phi(x)$ an, so verschwindet der Ausdruck, da

. If we apply $\mathcal{D}_{\kappa\nu\mu}$ from (41.18) to a scalar $\Phi(x)$ then the expression vanishes, since

$$[D_\nu, D_\mu]\Phi(x) = D_\nu\Phi_{,\mu}(x) - D_\mu\Phi_{,\nu}(x) = \Phi_{,\mu,\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Phi_{,\lambda} - \Phi_{,\nu,\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\Phi_{,\lambda} = 0 \tag{41.20}$$

folgt. Wenden wir dagegen (41.19) auf $\Phi(x)$ an, dann erhalten wir

holds. If however, we apply (41.19) to $\Phi(x)$ then we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\kappa\nu\mu}\Phi(x) &= [D_\kappa, D_\nu]\Phi_{,\mu}(x) + [D_\nu, D_\mu]\Phi_{,\kappa}(x) + [D_\mu, D_\kappa]\Phi_{,\nu}(x)\\ &= \left(R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} + R^\lambda{}_{\kappa\mu\nu} + R^\lambda{}_{\nu\kappa\mu}\right)\Phi_{,\lambda}.\end{aligned} \tag{41.21}$$

Da die Ableitungen $\Phi_{,\lambda}$ an einem bestimmten Ort unabhängig voneinander gewählt werden können, muss die Klammer identisch verschwinden, womit die Beziehung (41.14) gezeigt ist.
Wenden wir nun (41.18) auf einen Vektor $A_\rho(x)$ an, so erhalten wir wegen

Since the derivatives $\Phi_{,\lambda}$ at a certain point in space-time can be chosen independently, it follows that the expression in brackets has to vanish identically, which proves the relation (41.14).
If we now apply (41.18) to the vector $A_\rho(x)$, then because of

$$[D_\nu, D_\mu]A_\rho = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}A_\lambda \tag{41.22}$$

den Ausdruck

we obtain the expression

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\kappa\nu\mu}A_\rho(x) &= D_\kappa\left(R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}A_\lambda\right) + D_\nu\left(R^\lambda{}_{\rho\kappa\mu}A_\lambda\right) + D_\mu\left(R^\lambda{}_{\rho\nu\kappa}A_\lambda\right)\\ &= \left(R^\lambda{}_{\rho\mu\nu;\kappa} + R^\lambda{}_{\rho\kappa\mu;\nu} + R^\lambda{}_{\rho\nu\kappa;\mu}\right)A_\lambda + R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}A_{\lambda;\kappa} + R^\lambda{}_{\rho\kappa\mu}A_{\lambda;\nu} + R^\lambda{}_{\rho\nu\kappa}A_{\lambda;\mu}.\end{aligned} \tag{41.23}$$

Wenden wir dagegen (41.19) auf $A_\rho(x)$ an, dann folgt

If we apply, however, (41.19) to $A_\rho(x)$ then we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\kappa\nu\mu}A_\rho(x) &= [D_\kappa, D_\nu]A_{\rho;\mu} + [D_\nu, D_\mu]A_{\rho;\kappa} + [D_\mu, D_\kappa]A_{\rho;\nu}\\ &= \left(R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} + R^\lambda{}_{\kappa\mu\nu} + R^\lambda{}_{\nu\mu\kappa}\right)A_{\rho;\lambda} + R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}A_{\lambda;\kappa} + R^\lambda{}_{\rho\kappa\mu}A_{\lambda;\nu} + R^\lambda{}_{\rho\nu\kappa}A_{\lambda;\mu}.\end{aligned} \tag{41.24}$$

Wenn wir nun (41.23) und (41.24) gleich setzen, dann heben sich jeweils die letzten drei $R^{\cdot}{}_{...}A_{\cdot;\cdot}$ Beiträge weg. Die letzte Klammer in (41.24) verschwindet wegen (41.14). Daher muss auch die letzte Klammer in (41.23) verschwinden, da die Ableitungen der Komponenten des Vektorfelds A_ρ in einem gegebenen Punkt von einander unabhängig gewählt werden können. Daraus folgt die B -Identität.

If we now equate (41.23) and (41.24) then the last three contributions of type $R^{\cdot}{}_{...}A_{\cdot;\cdot}$ cancel. The last bracket in (41.24) vanishes because of (41.14). Thus the last bracket in (41.23) has to vanish, since the derivatives of the components of the vector field A_ρ can be chosen independently in a given point. This vanishing bracket contains the B identity.

41.c Ricci-Tensor, Krümmungs-Skalar

41.c Ricci Tensor, Curvature Scalar

Den verjüngten Tensor

The contracted tensor

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \tag{41.25}$$

bezeichnet man als R -Tensor. Er ist symmetrisch

is called the R tensor. It is symmetric

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{41.26}$$

Eine zweite Verjüngung

A second contraction yields

$$R = R^\mu{}_\mu \tag{41.27}$$

ergibt den Krümmungs- oder R -Skalar . Der vierkomponentige Krümmungstensor ist in zwei Dimensionen durch den Krümmungs-Skalar definiert. Dabei ist

which is called curvature or R scalar . In two dimensions the four-component curvature tensor is defined by the curvature scalar. Then

$$\frac{R}{2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \tag{41.28}$$

die G sche Krümmung, wobei ρ_1 und ρ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind. In drei Dimensionen ist der vierkomponentige Krümmungstensor durch den R -Tensor eindeutig festgelegt.

is the G ian curvature, where ρ_1 and ρ_2 are the main curvature radii. In three dimensions the R tensor uniquely determines the four-component curvature tensor.

41.d Beispiel: Kugeloberfläche

41.d Example: Surface of a Sphere

Für die Kugeloberfläche findet man in Kugelkoordinaten (r =const.)

In spherical coordinates one has for the surface of a sphere (r =const.)

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta. \tag{41.29}$$

Die einzigen von Null verschiedenen Γ sind die mit zwei Indices ϕ und einem Index θ

The only non-vanishing Γ are those with two indices ϕ and one index θ

$$\Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2 \sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma_{\phi\theta\phi} = r^2 \sin\theta\cos\theta, \tag{41.30}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \mathrm{ctg}\theta. \tag{41.31}$$

Daraus findet man dann für den Krümmungstensor

Hence we obtain for the tensor of curvature

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta, \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = r^2\sin^2\theta, \quad R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1, \tag{41.32}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta, \quad R_{\theta\theta} = 1, \tag{41.33}$$

$$R^{\phi}{}_{\phi} = R^{\theta}{}_{\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad R = \frac{2}{r^2}. \tag{41.34}$$

Aufgabe: Für festes θ erhält man in Kugelkoordinaten einen (Doppel-)Kegel. Berechne für diesen (Doppel-)Kegel den R schen Krümmungs-Tensor.

Exercise: For fixed θ one obtains in spherical coordinates a (double) cone. Calculate for this (double) cone the R ian curvature tensor.

42 Wirkung des Gravitationsfelds

42 Action of the Gravitational Field

42.a Das freie Gravitationsfeld

42.a Free Gravitational Field

In der allgemeinen Relativitätstheorie setzt sich die Wirkung aus der Gravitations-Wirkung, beschrieben durch eine Lagrange-Dichte L_g und der Wirkung $L_\mathrm{mF} = L_\mathrm{m} + L_\mathrm{F}$ der Massen und der Felder zusammen. Das heißt, man führt die Wirkung

In the general theory of relativity one deals with an action which consists of the gravitational action described by a Lagrangean density L_g and the action $L_\mathrm{mF} = L_\mathrm{m} + L_\mathrm{F}$ of the masses and fields. Thus one introduces the action

$$I = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}(L_\mathrm{g} + L_\mathrm{mF}) \tag{42.1}$$

ein. Dabei ist $\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}$ das invariante Raumzeit-Element (38.23). Die Gleichungen des Gravitationsfeldes, das von der Metrik repräsentiert wird, erhält man durch Variation der Metrik g selbst.

. Here $\mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}$ is the invariant spacetime element (38.23). The equations of the gravitational field which is represented by the metric, are obtained by the variation of the metric g itself.

Wir erwarten, dass L_g und L_F Vierer-Skalare sind. Für die L -Dichte des Gravitationsfeldes bieten sich der Krümmungs-Skalar R und die Konstante an. Letzteres ist die kosmologische Konstante, die von E zunächst eingeführt und dann verworfen wurde, heute aber wieder intensiv diskutiert wird. Die Konstante allein führt zu keiner vernünftigen Dynamik. Daher spielt der Krümmungs-Skalar eine wichtige Rolle. Dieser Krümmungs-Skalar enthält aber zweite Ableitungen des Feldes g. Dies ist ungewöhnlich. In der Regel enthält die L -Funktion nur erste Ableitungen der Felder. Es ist vermutlich nicht möglich, einen kovarianten Skalar aus ersten Ableitungen zu bilden, da nach (40.30) $g^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = g_{\mu\nu;\kappa} = 0$ die kovarianten Ableitungen verschwinden.

We expect that L_g and L_F are four-scalars. The curvature scalar R and the constant lend themselves for the L an density of the gravitational field. The last one is the cosmological constant which was initially introduced, but later abolished by E . These days it is intensively discussed again. The constant alone does not yield a reasonable dynamics. Thus the curvature scalar plays an important role. But this curvature scalar contains second derivatives of the field g. This is unusual. Normally the L an function only contains first derivatives of the fields. Probably it is not possible to form a covariant scalar from first derivatives since according to (40.30) $g^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = g_{\mu\nu;\kappa} = 0$ the covariant derivatives vanish.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, das Problem zu behandeln. Eine besteht darin, per partieller Integration einen Oberflächenterm herauszuziehen, so dass man eine L -Dichte erhält, die nur erste Ableitungen von g enthält, die aber nicht manifest kovariant ist. Bei der zweiten Möglichkeit bestimmt man die Variation von $\sqrt{-g}R$ und zieht dann einen Divergenz-Term ab. Beide Verfahren führen auf die gleichen kovarianten Bewegungsgleichungen.

There are now two possibilities to deal with this problem. One is to extract a surface term by partial integration so that one obtains a L an density which contains only first derivatives of g, but that is no longer manifestly covariant. The second possibility is to determine the variation of $\sqrt{-g}R$ and then to subtract a divergence term. Both procedures yield the same covariant equations of motion.

42.b LAGRANGE-Dichte ohne zweite Ableitungen

42.b LAGRANGEan Density without Second Derivatives

Wir wollen nun eine Divergenz aus $R\sqrt{-g}$ herausziehen, so dass wir eine L -Dichte erhalten, die nur erste Ableitungen in g enthält. Wir schreiben dazu

We will now extract a divergence from $R\sqrt{-g}$, so that we obtain a L an density which only contains first derivatives in g. For this purpose we write

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\kappa\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa} + g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\right). \tag{42.2}$$

Für die ersten beiden Terme verwenden wir

For the first two terms we use

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\kappa\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \partial_\kappa(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}) - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}), \tag{42.3}$$

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa} = \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa}) - \Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}). \tag{42.4}$$

Wir finden damit

Thus we find

$$\int \mathrm{d}^4 x R\sqrt{-g} = \int \mathrm{d}^4 x G\sqrt{-g} + \int \mathrm{d}^4 x \partial_\kappa(\sqrt{-g}w^\kappa) \tag{42.5}$$

mit

with

$$w^\kappa = g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - g^{\mu\kappa}\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \tag{42.6}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(-\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\right) + g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}. \tag{42.7}$$

Wegen (40.34) haben wir

Eq. (40.34) yields

$$\mathrm{d}\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\mathrm{d}g_{\mu\nu}. \tag{42.8}$$

Weiter benötigen wir die Variation von $g^{\mu\nu}$. Hierzu verwenden wir die Matrix-Gleichung $g^{\cdot\cdot}g_{\cdot\cdot} = \mathbb{1}$, aus der $\mathrm{d}g^{\cdot\cdot}g_{\cdot\cdot} + g^{\cdot\cdot}\mathrm{d}g_{\cdot\cdot} = 0$ und damit $\mathrm{d}g^{\cdot\cdot} = -g^{\cdot\cdot}\mathrm{d}g_{\cdot\cdot}g^{\cdot\cdot}$, das heißt

Furthermore we need the variation of $g^{\mu\nu}$. For this purpose we use the matrix equation $g^{\cdot\cdot}g_{\cdot\cdot} = \mathbb{1}$, from which we obtain $\mathrm{d}g^{\cdot\cdot}g_{\cdot\cdot} + g^{\cdot\cdot}\mathrm{d}g_{\cdot\cdot} = 0$ and thus $\mathrm{d}g^{\cdot\cdot} = -g^{\cdot\cdot}\mathrm{d}g_{\cdot\cdot}g^{\cdot\cdot}$, that is

$$\mathrm{d}g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}\mathrm{d}g_{\kappa\lambda} \tag{42.9}$$

folgt. Damit finden wir dann

. Then we obtain

$$\partial_\kappa(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = (\frac{1}{2}g^{\lambda\iota}g^{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\iota})\partial_\kappa g_{\lambda\iota}\sqrt{-g}. \tag{42.10}$$

Verwenden wir noch

If we use

$$\partial_\kappa g_{\lambda\iota} = \Gamma_{\lambda\kappa\iota} + \Gamma_{\iota\kappa\lambda}, \tag{42.11}$$

so finden wir schließlich

then we obtain

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(-\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\right) = -2g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\lambda} + 2g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}, \tag{42.12}$$

so dass

so that we finally obtain

$$G = g^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\lambda}) \tag{42.13}$$

bleibt. G ist kein Skalar. Es hat jedoch den Vorteil, dass es nur erste Ableitungen von g enthält im Gegensatz zu R, das auch zweite Ableitungen enthält. Bei der Variation von G muss man am Rand nur fordern, dass g festgehalten wird, bei R auch, dass die ersten Ableitungen von g festgehalten werden.

. G is not a scalar. But it has the advantage that it contains only first derivatives of g in contrast to R which also contains second derivatives. When varying G we only need the requirement that g is fixed at the boundary, whereas for R one has to demand that the first derivatives are fixed, too.

42.c Variation der LAGRANGE-Dichte

42.c Variation of the LAGRANGEan Density

Als nächstes betrachten wir die Variation von $R\sqrt{-g} = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$. Wir beginnen mit $\delta R_{\mu\nu}$,

Next we consider the variation of $R\sqrt{-g} = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$. We begin with $\delta R_{\mu\nu}$,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu} = \partial_\kappa \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\kappa} + \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}. \tag{42.14}$$

Im Gegensatz zu Γ, das kein Tensor ist, ist jedoch $\delta\Gamma$ als Differenz zweier Γs am gleichen Punkt ein Tensor. Dies kann man leicht Gleichung (39.18) entnehmen. Daher sind die kovarianten Ableitungen

In contrast to Γ which is not a tensor, $\delta\Gamma$ as a difference of two Γs at the same point is a tensor. This can easily be seen from (39.18). Thus the covariant derivatives

$$\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu;\lambda} = \partial_\lambda \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\iota}\delta\Gamma^{\iota}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\iota} - \Gamma^{\iota}{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\iota} \tag{42.15}$$

ebenfalls Tensoren. Mit diesen lässt sich die Variation von R als

are tensors, too. The variation of R can be written

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\kappa;\nu} + \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu;\kappa} \tag{42.16}$$

schreiben. Berücksichtigen wir, dass $g^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = 0$, so folgt

with them. Considering that $g^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = 0$ one obtains

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\kappa})_{;\nu} + (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu})_{;\kappa} \\ = A^{\nu}{}_{;\nu} &= \partial_\nu A^\nu + \Gamma^{\nu}{}_{\nu\lambda}A^\lambda \end{aligned} \tag{42.17}$$

mit

with

$$A^\nu = -g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\kappa} + g^{\mu\kappa}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\kappa} \tag{42.18}$$

und schließlich

and finally

$$\partial_\nu \sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}\partial_\nu g_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}(\Gamma_{\mu\nu\kappa} + \Gamma_{\kappa\mu\nu}) = \sqrt{-g}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\kappa}, \tag{42.19}$$

das heißt, wir erhalten

that is we obtain

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\nu(\sqrt{-g}A^\nu). \tag{42.20}$$

Wir finden also, dass dieser Ausdruck eine gewöhnliche Divergenz ist, das heißt ihr Volumenintegral verschwindet, wenn der Vektor A an der Oberfläche verschwindet. Es bleibt daher nur noch $\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}$ zu betrachten. Wir erhalten

Thus we find that this expression is an ordinary divergence, that is, its volume integral vanishes if the vector A vanishes at the surface. Thus it is sufficient to consider

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}, \tag{42.21}$$

so dass schließlich

so that finally

$$\delta\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} \tag{42.22}$$

folgt.

follows.

Zusätzlich kann man zu dem Krümmungstensor noch einen Beitrag $\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ einführen (E -Term). Die Variation ergibt hierfür

In addition to the curvature scalar one can introduce a contribution $\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ (E term). The variation for this term yields

$$\delta\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{42.23}$$

Insgesamt schreibt man

In total one writes

$$L_{\mathrm{g}} = -\frac{c^4}{16\pi k_{\mathrm{N}}}(R + 2\Lambda), \tag{42.24}$$

wobei es sich herausstellen wird, dass k_{N} N s Gravitationskonstante ist, während Λ als kosmologische Konstante bezeichnet wird. Diese Konstante wird als klein und positiv angenommen.

where we will find, that k_{N} is N 's gravitational constant, whereas Λ is called cosmological constant. This constant is assumed to be small and positive.

Die Variation von I_{g} ergibt

The variation of I_{g} yields

$$\delta I_{\mathrm{g}} = -\frac{c^3}{16\pi k_{\mathrm{N}}} \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \tag{42.25}$$

Der durch die Variation von I_{g} entstandene Ausdruck

The expression obtained by the variation of I_{g}

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{42.26}$$

wird auch als E -Tensor bezeichnet. Er hat die Eigenschaft

is called E tensor. It has the property

$$D_\mu G^\mu{}_\nu = 0. \tag{42.27}$$

Wir zeigen dies mittels der B -Identität und formen um

We show this by means of the B identity and rewrite

$$D_\mu G^\mu{}_\nu = D_\mu R^\mu_\nu - \frac{1}{2} D_\nu R = R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\nu;\mu} - \frac{1}{2} R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\mu;\nu} = \frac{1}{2} \left(R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\nu;\mu} + R^{\mu\lambda}{}_{\mu\nu;\lambda} + R^{\lambda\mu}{}_{\mu\lambda;\nu} \right) = 0. \tag{42.28}$$

Der erste und zweite Term in der Klammer rühren von $R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\mu;\nu}$ her, wobei im zweiten Term die Summationsindices μ und λ ausgetauscht wurden. Vertauscht man nun das vordere und das hintere Index-Paar im diesem zweiten R, so ergibt die B -Identität Null.
Wir sehen, dass die Divergenz des Tensors unter der Variation von I_{g} verschwindet

The first and the second term in brackets come from $R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\mu;\nu}$, where in the second term the summation indices μ and λ have been exchanged. If one now exchanges the first two indices and the second two indices in this second R, then the B identity yields zero.
We see that the divergence of the tensor under the variation of I_{g} vanishes

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0, \tag{42.29}$$

da $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ gilt.

since $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ holds.

43 EINSTEIN-Gleichungen

43 EINSTEIN's Equations

43.a EINSTEINsche-Gleichungen

43.a EINSTEIN's Equations

Die Wirkung des gesamten Systems setzt sich zusammen aus der des Gravitationsfeldes und der der übrigen Freiheitsgrade,

The action of the total system consists of that of the gravitational field and of the other degrees of freedom

$$I = I_{\rm g} + I_{\rm mF} = \int {\rm d}^4x \sqrt{-g}(-\frac{c^3}{16\pi k_{\rm N}}R + \frac{1}{c}L_{\rm mF}). \tag{43.1}$$

Die Bewegungsgleichungen werden aus dem Variationsprinzip

The equations of motion are obtained from the variational principle

$$\delta I = 0 \tag{43.2}$$

gewonnen. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird auch die Metrik g der Variation unterworfen. Der erste Term aus (43.1) liefert wie im vorhergehenden Abschnitt hergeleitet

. In the general theory of relativity also the metric g is subject to variation. The first term in (43.1) yields as shown in the preceeding section

$$\delta I_{\rm g} = -\frac{c^3}{16\pi k_{\rm N}} \int {\rm d}^4x \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R). \tag{43.3}$$

Der zweite Term liefert

The second term yields

$$\delta I_{\rm mF} = \frac{1}{2c}\int {\rm d}^4x\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \tag{43.4}$$

mit

with

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{-g}L_{\rm mF}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\frac{\partial\sqrt{-g}L_{\rm mF}}{\partial\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}}. \tag{43.5}$$

Die Bezeichnung $T_{\cdot\cdot}$ wird eingeführt, da es sich herausstellt, dass diese Größe der Energie-Impuls-Tensor ist. Wir werden dies später zeigen. Damit lauten die Bewegungsgleichungen für die Felder g

The notation $T_{\cdot\cdot}$ is introduced, since we will find that this quantity is the energy-momentum tensor. This will be shown later. Thus the equations of motion for the fields g read

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi k_{\rm N}}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{43.6}$$

Dies sind die Gleichungen für das Gravitationsfeld, die E erhielt. Durch Kontraktion findet man

These are the equations for the gravitational field, which were obtained by E . By contraction one obtains

$$R = -\frac{8\pi k_{\rm N}}{c^4}T - 4\Lambda, \quad T := T^\mu{}_\mu. \tag{43.7}$$

Damit lassen sich die E schen Gleichungen auch in der Form

Thus E 's equations can be written in the form

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k_{\rm N}}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) - g_{\mu\nu}\Lambda \tag{43.8}$$

schreiben. Die kosmologische Konstante Λ ist sehr klein und spielt nur auf kosmologische Entfernungen eine Rolle. Wir lassen sie daher meistens weg.

too. The cosmological constant Λ is very small and plays a role only at cosmological distances. Therefore we will often leave it aside.

43.b Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

43.b Energy-Momentum Tensor of the Electromagnetic Field

Wir wollen nun für das elektromagnetische Feld nachprüfen, dass die in (43.5) angegebene Größe tatsächlich der Energie-Impuls-Tensor ist. Die L - -Dichte lautet

We will now check for the electromagnetic field that the quantity given by (43.5) is indeed the energy momentum tensor. The L an density reads

$$L_{\rm F} = -\frac{1}{16\pi} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}. \tag{43.9}$$

Im Rahmen des Variations-Prinzips dürfen wir nur unabhängige Felder variieren. Da die kovarianten und die kontravarianten Komponenten miteinander verknüpft sind, dürfen wir nur bezüglich der einen oder anderen Art der Komponenten variieren. Wir verwenden die kovarianten und schreiben

Within the variational principle we are only allowed to vary independent fields. Since the covariant and the contravariant components are related to each other, we have to vary with respect to one type of components. We choose the covariant ones and write

$$L_{\rm F} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}. \tag{43.10}$$

Aus Gl. (43.5) erhalten wir

From eq. (43.5) we obtain

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} L_{\rm F}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} L_{\rm F} + 2 \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{43.11}$$

Aus (40.34) folgt

Eq. (40.34) yields

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\nu}. \tag{43.12}$$

Damit erhalten wir

Thus we obtain

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} g^{\kappa\lambda} - g_{\mu\nu} L_{\rm F} \tag{43.13}$$

in Übereinstimmung mit (34.62). An einer Stelle wäre uns beinahe ein Fehler unterlaufen. Tatsächlich sind nicht die Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors F unabhängig, sondern die des Vierer-Potentials A. Beim Übergang zu F bilden wir Ableitungen, die im Allgemeinen C - Symbole und damit Ableitungen der g enthalten. Nach diesen wäre auch zu differenzieren gewesen. Nur der Umstand, dass sich diese Beiträge wegheben (40.37), führte zum korrekten Ergebnis.

in agreement with (34.62). At one point we had nearly made a mistake. The reason is that the components of the electro-magnetic field tensor F are not independent, but those of the vector potential A. In passing to F we introduce derivatives which contain C - symbols and thus derivatives of g. One should have calculated the corresponding derivatives. Only the fact that these contributions cancel (40.37) yields a correct result.

43.c Energie-Impuls-Tensor der Massen

43.c Energy-Momentum Tensor of Masses

Die Wirkung von Massen ist durch

The action of masses is given by

$$I_{\rm m} = -\sum_a m_a c^2 \int {\rm d}\tau_a = -\sum_a m_a c^2 \int {\rm d}t \gamma_a^{-1}, \quad \gamma_a^{-1} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \tag{43.14}$$

gegeben. Die Variation nach g ergibt

. The variation with respect to g yields

$$\delta I_{\rm m} = -\sum_a \frac{m_a c}{2} \int {\rm d}t \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \delta g_{\mu\nu}}{\sqrt{\cdots}} = -\sum_a \frac{m_a}{2} \int {\rm d}\tau u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu}. \tag{43.15}$$

Da $\delta g_{..} = -g_{..}\delta g^{..} g_{..}$, erhalten wir

$$\delta I_{\rm m} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int \mathrm{d}\tau u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}. \tag{43.16}$$

Wir können diesen Ausdruck als Volumenintegral über eine Dichte schreiben, in dem wir

$$\int \mathrm{d}\tau = \int \mathrm{d}t\gamma^{-1} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\gamma^{-1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\delta_a(x) \tag{43.17}$$

mit der Definition

$$\sqrt{-g}\delta_a(x) = \gamma^{-1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)) = \gamma^{-1}\prod_\alpha \delta(x^\alpha - x_a^\alpha(x^0)) \tag{43.18}$$

von $\delta_a(x)$ schreiben. Da die Eigenzeit $\int \mathrm{d}\tau$ ein Skalar und $\int \mathrm{d}x^4\sqrt{-g}$ ebenfalls invariant ist, ist auch $\delta_a(x)$ ein Skalar. Dann folgt

$$\delta I_{\rm m} = \sum_a \frac{m_a}{2c}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}u_{a\mu}u_{a\nu}\delta_a(x)\delta g^{\mu\nu} \tag{43.19}$$

und damit der Beitrag der Massen zu T

$$T_{\mu\nu} = \sum_a m_a u_\mu u_\nu \delta_a(x). \tag{43.20}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis in (32.30) und (34.39). Allerdings wurde hier die Funktion $\delta_a(x)$ verallgemeinert.

43.d Schlussbemerkungen

Wir haben an zwei Beispielen gezeigt, dass die Variation der Wirkung nach g tatsächlich den Energie-Impuls-Tensor T ergibt. Wir werden im folgenden Abschnitt die Bewegungsgleichungen in kovarianter Form herleiten und den Energie-Impuls-Tensor noch in allgemeiner Form betrachten. Dabei werden wir auch zeigen, dass der aus der speziellen Relativitätstheorie bekannte Erhaltungs-Satz $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, (34.43) nun die kovariante Form

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{43.21}$$

annimmt, was allerdings keinen Erhaltungs-Satz mehr darstellt. Dass eine solche Beziehung besteht, ist allerdings zu vermuten, da die linke Seite von (43.6) auf Grund von (42.29) der Beziehung

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\right)_{;\mu} = 0 \tag{43.22}$$

genügt.

Da man aber jetzt gerne erst mal sehen möchte, dass diese Theorie auch tatsächlich eine Theorie der Gravitation ist, kann man die Abschnitte 44 und 45 auch erst einmal überspringen und mit dem darauf folgenden Abschnitt fortsetzen. Doch sollte man auf jeden Fall zu gegebener Zeit Abschnitt 45.d studieren.

Since $\delta g_{..} = -g_{..}\delta g^{..} g_{..}$ we obtain (43.16).

We may write this expression as a volume integral over a density by writing (43.17) with the definition (43.18) of $\delta_a(x)$. Since the proper time $\int \mathrm{d}\tau$ is a scalar and $\int \mathrm{d}x^4\sqrt{-g}$ is invariant, too, it turns out that $\delta_a(x)$ is also a scalar. Then we obtain (43.19) and thus the contribution of the masses to T (43.20).

This is in agreement with the result in (32.30) and (34.39). However, here we have generalized the function $\delta_a(x)$.

43.d Final Remarks

For two examples we have shown that the variation of the action with respect to g yields indeed the energy-momentum tensor T. In the following section we will derive the equations of motion in covariant form and determine the energy-momentum tensor in its general form. We will show, too, that the conservation theorem $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, (34.43), known from special relativity gets the covariant form (43.21) which however, represents no longer a conservation theorem. That such a relation exists can be conjectured, since the left hand-side of eq. (43.6) obeys (43.22) due to (42.29).

However, since one would like to see first that this theory is really a theory of gravitation one may at first skip sections 44 and 45 and continue with the section after those. However, one should in any case eventually study section 45.d.

44 Bewegungs-Gleichungen

44 Equations of Motion

In diesem Abschnitt bringen wir die Bewegungs-Gleichungen in eine kovariante Darstellung ausgehend vom Wirkungs-Integral

In this section we bring the equations of motion in a covariant representation starting out from the action integral

$$I = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}L(x) \tag{44.1}$$

Die Dichte der Lagrange-Funktion setzt sich aus den Beiträgen für die Gravitation L_g, für die Felder L_F und für die Massen L_m zusammen,

The density of the Lagrangean consists of the contributions for gravitation L_g, for the fields L_F and for the masses L_m,

$$L(x) = L_\mathrm{g}(x) + L_\mathrm{F}(x) + L_\mathrm{m}(x). \tag{44.2}$$

Die Dichte der Lagrange-Funktion für die Gravitation haben wir bereits in Abschnitt 42 betrachtet. Für den Feldanteil setzen wir die Dichte der L -Funktion an als

. We have already considered the gravitational part of the density of the L an in section 42. We introduce the density of the L an for the fields as

$$L_\mathrm{F} = L_\mathrm{F}(g_{\mu\nu}, \Phi, \Phi_{;\kappa}, A_\mu, A_{\mu;\kappa}), \tag{44.3}$$

wobei wir generell auch mehrere skalare Felder Φ und Vektorfelder A_μ zulassen.
Die Wirkung von Massenpunkten a schreiben wir wieder als Integral über die Eigenzeit

where in general we admit several scalar fields Φ and vector fields A.
Again we describe the actions of mass points a by an integral over the proper time

$$I_\mathrm{m} = -c^2 \sum_a \int \mathrm{d}\tau_a M_a, \quad M_a = M_a(g_{\mu\nu}, \Phi, A_\mu, u^\mu). \tag{44.4}$$

Mit $\delta_a(x)$ aus (43.18) können wir die L -Dichte für Massen einführen

With $\delta_a(x)$ from (43.18) we can introduce the L -an density for masses

$$L_\mathrm{m}(x) = -c^2 \sum_a M_a \delta_a(x). \tag{44.5}$$

44.a Felder

44.a Fields

Die Bewegungs-Gleichungen erhalten wir wieder aus der Forderung, dass die Variation der Wirkung verschwindet. Bei der Herleitung der Gleichungen müssen wir unterscheiden, ob wir die Ableitungen der Felder durch die kovarianten Ableitungen $_{;\kappa}$ oder die partiellen Ableitungen $_{,\kappa}$ ausdrücken. Dementsprechend unterscheiden wir

Again the equations of motion are obtained from the requirement that the variation of the action vanishes. In deriving the equations we have to distinguish, whether we express the derivatives of the fields by the covariant derivatives $_{;\kappa}$ or the partial derivatives $_{,\kappa}$. Correspondingly we distinguish

$$L_\mathrm{F} = L_\mathrm{F}(g_{\mu\nu}, \Phi, \Phi_{;\kappa}, A_\mu, A_{\mu;\kappa}) = \hat{L}_\mathrm{F}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\kappa}, \Phi, \Phi_{,\kappa}, A_\mu, A_{\mu,\kappa}). \tag{44.6}$$

Wir erhalten dann für die Felder Φ und A die Gleichungen

Then we obtain for the fields Φ and A the equations

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_\mathrm{mF})}{\partial\Phi_i} - \partial_\kappa \frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_\mathrm{mF})}{\partial(\partial_\kappa\Phi_i)} = 0, \tag{44.7}$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_\mathrm{mF})}{\partial A_{i\mu}} - \partial_\kappa \frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_\mathrm{mF})}{\partial(\partial_\kappa A_{i\mu})} = 0. \tag{44.8}$$

Diese Gleichungen können in eine manifest kovariante Form gebracht werden. Für das skalare Feld Φ_i folgt

These equations can be brought into a manifestly covariant form. For the scalar field Φ_i one obtains

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_{\mathrm{mF}})}{\partial\Phi_i} = \sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial\Phi_i}, \tag{44.9}$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_{\mathrm{mF}})}{\partial(\partial_\kappa\Phi_i)} = \sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial\Phi_{i;\kappa}} \tag{44.10}$$

und mit (40.36)

and with (40.36)

$$\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial\Phi_i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k\left(\sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial\Phi_{i;\kappa}}\right) = \left(\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial\Phi_{i;\kappa}}\right)_{;\kappa}. \tag{44.11}$$

Wenn wir den Anteil der Massen von dem der Felder separat ausdrücken, folgt

If we express the contribution of the masses separately from that of the fields, we obtain

$$\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial\Phi_i} - \sum_a \frac{\partial M_a}{\partial\Phi_i}c^2\delta_a(x) = \left(\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial\Phi_{i;\kappa}}\right)_{;\kappa}. \tag{44.12}$$

Für das Vektorfeld $A_{i\nu}$ erhalten wir

For the vector field $A_{i\nu}$ we obtain

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_{\mathrm{mF}})}{\partial A_{i\nu}} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\nu}} - \frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\mu;\kappa}}\Gamma^\nu{}_{\mu\kappa}\right), \tag{44.13}$$

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_{\mathrm{mF}})}{\partial(\partial_\kappa A_{i\nu})} = \sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\nu;\kappa}} \tag{44.14}$$

und damit

and therefore

$$\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\kappa\left(\sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\nu;\kappa}}\right) + \frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\mu;\kappa}}\Gamma^\nu{}_{\mu\kappa} = \left(\frac{\partial L_{\mathrm{mF}}}{\partial A_{i\nu;\kappa}}\right)_{;\kappa}. \tag{44.15}$$

Trennen wir auch hier Feld- und Massen-Anteil, so folgt

If we separate the contributions of masses and fields here, too, then we obtain

$$\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\nu}} - \sum_a \frac{\partial M_a}{\partial A_{i\nu}}c^2\delta_a(x) = \left(\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\nu;\kappa}}\right)_{;\kappa}. \tag{44.16}$$

Damit haben wir die Gleichungen für die Felder in kovarianter Form erhalten.

Thus we have obtained the equations for the fields in covariant form.

44.b Massen

44.b Masses

Wir gehen aus von der Bewegungsgleichung für Massen

We start from the equation of motion for masses

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}_a}{\partial\dot{x}^\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}_a}{\partial x^\alpha}. \tag{44.17}$$

mit

with

$$\mathcal{L}_a = -M_a(g_{\mu\nu}(x_a), \Phi(x_a), A_\mu(x_a), u^\mu)c^2\gamma_a^{-1}. \tag{44.18}$$

Die Berechnung der Ableitung nach den Geschwindigkeiten läuft weitgehend analog zu denen in der speziellen Relativitätstheorie. Zu beachten ist, dass

The calculations of the derivatives with respect to the velocities runs parallel to those in special relativity. One has to note that

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}c^2 + 2g_{0\alpha}c\dot{x}^\alpha + g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} \tag{44.19}$$

und damit

and thus

$$\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial\dot{x}^\alpha} = \frac{g_{0\alpha}c + g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta}{c\sqrt{\ldots}} = \frac{\dot{x}_\alpha}{c^2}\gamma \tag{44.20}$$

und

and

$$\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2c\sqrt{\ldots}}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2\gamma c^2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}u^\mu u^\nu\right). \tag{44.21}$$

folgen. Damit erhalten wir entsprechend wie in (34.14, 34.15)

are obtained. Then we obtain similarly as in (34.14, 34.15)

$$P_{a\alpha} := -\frac{\partial\mathcal{L}_a}{\partial\dot{x}^\alpha}, \quad P_{a\nu} = M_a u_{a\nu} + c^2\frac{\partial M_a}{\partial u^\nu} - \frac{\partial M_a}{\partial u^\mu}u_\nu u^\mu. \tag{44.22}$$

Die Ableitung der L -Funktion nach den Ortskoordinaten ergibt

The derivative of the L an function with respect to the space coordinates yields

$$-\frac{\partial\mathcal{L}_a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial M_a}{\partial x^\alpha}c^2\gamma^{-1} + M_a c^2\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial x^\alpha}. \tag{44.23}$$

Falls die Masse nicht an ein Feld gekoppelt ist ($M_a = m_a$), folgt die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld

If the mass is not coupled to a field ($M_a = m_a$), then we obtain the equation of motion in the gravitational field

$$\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \tag{44.24}$$

in Übereinstimmung mit (40.22).

in agreement with (40.22).

Im allgemeinen Fall erhalten wir

In the general case we obtain

$$\frac{\partial M_a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \frac{\partial M_a}{\partial\Phi_i}\partial_\alpha\Phi_i + \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}\partial_\alpha A_\mu + \frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}\partial_\alpha u^\kappa \tag{44.25}$$

mit

with

$$\partial_\alpha u^\kappa = \dot{x}^\kappa\partial_\alpha\gamma = -\dot{x}^\kappa\gamma^2\partial_\alpha\gamma^{-1} = -u^\kappa\gamma\partial_\alpha\gamma^{-1}. \tag{44.26}$$

In dem Ausdruck (44.25) wollen wir zur kovarianten Ableitung von A_μ übergehen. Hierzu setzen wir voraus, dass M_a ein Skalar ist. Daher ist es invariant gegen Transformationen

Now we wish to obtain covariant derivatives of A_μ in the expression (44.25). We assume for this purpose that M_a is a scalar. Thus it is invariant against transformations

$$\delta f^\mu = \omega^\mu{}_\nu f^\nu, \quad \delta f_\nu = -\omega^\mu{}_\nu f_\mu \tag{44.27}$$

mit infinitesimalen $\omega^\mu{}_\nu$ sein, da dann

with infinitesimal $\omega^\mu{}_\nu$, since then

$$\delta(f^\mu f_\mu) = 0 \tag{44.28}$$

gilt. Dies entspricht einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$. Im Gegensatz zur L -Transformation der speziellen Relativitätstheorie sind hier die $\omega^\mu{}_\nu$ voneinander unabhängig. Damit folgt dann

holds. This corresponds to an infinitesimal transformation of the coordinates $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$. In contrast to the L transformation of special relativity we have now $\omega^\mu{}_\nu$ which are completely independent. Thus we obtain

$$\delta M_a = \frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial M_a}{\partial u^\mu}\delta u^\mu = \frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}(-\omega^\kappa{}_\mu g_{\kappa\nu} - \omega^\kappa{}_\nu g_{\mu\kappa}) - \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}\omega^\kappa{}_\mu A_\kappa + \frac{\partial M_a}{\partial u^\mu}\omega^\mu{}_\lambda u^\lambda = 0. \tag{44.29}$$

Benennen wir nun die Summationsvariable so um, dass wir jeweils den Faktor $\omega^\kappa{}_\mu$ haben, so folgt

If we rename the summation variable so that we always have the factor $\omega^\kappa{}_\mu$, then we obtain

$$\delta M_a = \omega^\kappa{}_\mu\left(-2\frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}g_{\kappa\nu} - \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}A_\kappa + \frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}u^\mu\right) = 0. \tag{44.30}$$

Der Klammer-Ausdruck muss verschwinden. Wir multiplizieren ihn mit ${\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}$ und addieren ihn zu (44.25)

The expression in brackets has to vanish. We multiply by ${\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}$ and add it to (44.25)

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_a}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2g_{\kappa\nu}{\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}) + \frac{\partial M_a}{\partial \Phi_i}\partial_\alpha \Phi_i + \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}(\partial_\alpha A_\mu - {\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}A_\kappa) + \frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}(\partial_\alpha u^\kappa + {\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}u^\mu) \\ &= \frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}\underbrace{g_{\mu\nu;\alpha}}_{0} + \frac{\partial M_a}{\partial \Phi_i}\Phi_{i;\alpha} + \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}A_{\mu;\alpha} + \frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}(-u^\kappa\gamma\partial_\alpha\gamma^{-1} + {\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}u^\mu). \end{aligned} \tag{44.31}$$

Wir haben damit den $\frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}$-Term eliminiert. Zugleich haben die Terme mit den Ableitungen $\frac{\partial M_a}{\partial \Phi_i}$ und $\frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}$ kovariante Form. Wir führen nun K_ν und X_α ein,

Thus we have eliminated the $\frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}}$ term. Simultaneously the terms with the derivatives $\frac{\partial M_a}{\partial \Phi_i}$ and $\frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}$ obtain a covariant form. Now we introduce K_ν and X_α by

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial x^\alpha} = \gamma^{-1}K_\alpha + X_\alpha \tag{44.32}$$

mit

with

$$K_\nu = c^2\left(\frac{\partial M_a}{\partial \Phi_i}\Phi_{i;\nu} + \frac{\partial M_a}{\partial A_\mu}A_{\mu;\nu}\right) \tag{44.33}$$

und

and

$$X_\alpha = \left(M_a - \frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}u^\kappa\right)c^2\partial_\alpha\gamma^{-1} + c^2\gamma^{-1}\frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}{\Gamma^\kappa}_{\alpha\mu}u^\mu. \tag{44.34}$$

Andererseits ist

On the other hand one has

$$D_\tau P_\alpha = \frac{\partial P_\alpha}{\partial \tau} - u^\nu {\Gamma^\kappa}_{\nu\alpha}P_\kappa \tag{44.35}$$

und

and

$$u^\nu {\Gamma^\kappa}_{\nu\alpha}P_\kappa = \left(M_a - u^\mu\frac{\partial M_a}{\partial u_\mu}\right)u_\kappa u^\nu {\Gamma^\kappa}_{\nu\alpha} + c^2\frac{\partial M_a}{\partial u^\kappa}{\Gamma^\kappa}_{\nu\alpha}u^\nu = \gamma X_\alpha \tag{44.36}$$

unter Verwendung von (44.21). Damit erhalten wir aus

by use of (44.21). Thus we obtain from

$$\frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \gamma^{-1}K_\alpha + X_\alpha = \gamma^{-1}(K_\alpha + u^\nu{\Gamma^\kappa}_{\nu\alpha}P_\kappa) \tag{44.37}$$

die kovariante Bewegungsgleichung

the covariant equation of motion

$$D_\tau P_\alpha = K_\alpha. \tag{44.38}$$

Man beachte, dass die Beschleunigung durch das Gravitationsfeld in der kovarianten Ableitung D_τ enthalten ist und vom Koordinatensystem abhängt.
Wir haben die Gleichung (44.38) nur für die räumlichen Komponenten hergeleitet. Sie gilt auch für die Zeitkomponente, da sie in jedem Koordinatensystem gilt. Führen wir insbesondere eine L -Transformation durch, so transformiert sich

Note that the acceleration by the gravitational field is contained in the covariant derivative D_τ and depends on the frame of coordinates.
The equation (44.38) has only be derived for spacial components. It also holds for the time component since it holds in all coordinate frames. If we perform a L transformation, then

$$D'_\tau P'_\alpha = K'_\alpha \tag{44.39}$$

in

transforms into

$${\Lambda_\alpha}^\nu D_\tau P_\nu = {\Lambda_\alpha}^\nu K_\nu \tag{44.40}$$

und damit

and therefore

$$\Lambda_\alpha{}^0 D_\tau P_0 = \Lambda_\alpha{}^0 K_0, \tag{44.41}$$

so dass also

so that finally

$$D_\tau P_\nu = K_\nu \tag{44.42}$$

gilt.

holds.

45 Energie-Impuls Tensor

45 Energy Momentum Tensor

45.a Kovariante Form

45.a Covariant Form

In diesem Unterabschnitt bringen wir den Energie-Impuls-Tensor in eine kovariante Form.

In this subsection we bring the energy-momentum tensor in a covariant form.

Den Energie-Impuls-Tensor erhält man in der allgemeinen Relativitätstheorie durch Variation des Feld- und Massen-Anteils der Wirkung nach dem metrischen Tensor (43.4)

In the general theory of relativity one obtains the energy-momentum tensor by variation of the contributions due to the fields and masses with respect to the metric tensor (43.4)

$$\delta I_{\mathrm{mF}} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{45.1}$$

Bei Variation des Feldanteils der L -Dichte folgt

Variation of the field contribution of the L an density yields

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_{\mathrm{F}})}{\partial g^{\mu\nu}} &= \frac{\partial(\sqrt{-g}L_{\mathrm{F}})}{\partial g^{\mu\nu}} + \sum_i \sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial A_{i\lambda;\rho}}{\partial g^{\mu\nu}} \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_{\mathrm{F}} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_i \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial g^{\mu\nu}}A_{i\sigma}\right), && (45.2)\\
\frac{\partial(\sqrt{-g}\hat{L}_{\mathrm{F}})}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})} &= \sum_i \sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial A_{i\lambda;\rho}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})} = -\sqrt{-g}\sum_i \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})}A_{i\sigma}. && (45.3)
\end{aligned}$$

Im Folgenden werde ich häufig die Summation über i nicht explizit hinschreiben. In diesem Abschnitt soll daher auch für diesen Index die Summations-Konvention gelten.
Die Variation des Massenanteils der L -Dichte ergibt

In the following I will often not write down the summation over i explicitly. In this section the summation convention should also hold for this index.

The variation of the mass contribution of the L - an density yields

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_{\mathrm{m}})}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\sum_a \left(\frac{M_a}{2}u_{a\mu}u_{a\nu} - \frac{\partial M_a}{\partial g^{\mu\nu}}c^2\right)\delta_a(x). \tag{45.4}$$

Den ersten Beitrag haben wir bereits erhalten, als wir die Variation für ein freies Teilchen durchführten. Der zweite Beitrag rührt natürlich von der Variation von M_a selbst her. Damit erhalten wir

We already obtained the first contribution when we performed the variation for a free particle. The second contribution stems from the variation of M_a itself. Thus we obtain

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}L_{\mathrm{F}} + 2\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\mu\nu}} - 2\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial g^{\mu\nu}}A_{i\sigma} + \frac{2}{\sqrt{-g}}\partial_\kappa\left(\sqrt{-g}\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})}A_{i\sigma}\right) \\
&+ \sum_a \left(M_a u_{a\mu}u_{a\nu} - 2\frac{\partial M_a}{\partial g^{\mu\nu}}c^2\right)\delta_a(x) \\
&= -g_{\mu\nu}L_{\mathrm{F}} + 2\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\mu\nu}} + 2\left(\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})}A_{i\sigma}\right)_{;\kappa} \\
&+ 2\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}A_{i\sigma}\underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial(\partial_\kappa g^{\tau\nu})}\Gamma^{\tau}{}_{\kappa\mu} + \frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\tau})}\Gamma^{\tau}{}_{\kappa\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}}{\partial g^{\mu\nu}}\right)} + \sum_a \left(M_a u_{a\mu}u_{a\nu} - 2\frac{\partial M_a}{\partial g^{\mu\nu}}c^2\right)\delta_a(x). && (45.5)
\end{aligned}$$

Aus

From

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda} &= g^{\sigma\tau}\Gamma_{\tau\rho\lambda} = g^{\sigma\tau}\frac{1}{2}\left(\partial_\rho g_{\tau\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\tau} - \partial_\tau g_{\rho\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(-g_{\tau\iota}g_{\lambda\pi}\partial_\rho g^{\iota\pi} - g_{\rho\iota}g_{\tau\pi}\partial_\lambda g^{\iota\pi} + g_{\rho\iota}g_{\lambda\pi}\partial_\tau g^{\iota\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-g_{\lambda\pi}\partial_\rho g^{\sigma\pi} - g_{\rho\iota}\partial_\lambda g^{\iota\sigma} + g^{\sigma\tau}g_{\rho\iota}g_{\lambda\pi}\partial_\tau g^{\iota\pi}\right)
\end{aligned} \tag{45.6}$$

erhält man mittels

and by using

$$\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda} = \frac{\partial\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})}\delta\partial_\kappa g^{\mu\nu} \tag{45.7}$$

unter Berücksichtigung, dass bezüglich μ und ν zu symmetrisieren ist (vgl. D.7),

and symmetrizing with respect to μ and ν we obtain (compare D.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda}}{\partial g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{4}\Big(-\delta^\sigma_\mu g_{\rho\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\lambda\nu} - \delta^\sigma_\mu g_{\lambda\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\nu\rho} - \delta^\sigma_\nu g_{\rho\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\lambda\mu} - \delta^\sigma_\nu g_{\lambda\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\mu\rho} \\
&\quad -g_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - g_{\rho\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda} - g_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} - g_{\rho\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda} \\
&\quad +g^{\sigma\tau}(g_{\rho\mu}g_{\lambda\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\nu\tau} + g_{\lambda\mu}g_{\rho\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\nu\tau} + g_{\rho\nu}g_{\lambda\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\mu\tau} + g_{\lambda\nu}g_{\rho\iota}\Gamma^{\iota}{}_{\mu\tau})\Big)
\end{aligned} \tag{45.8}$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda}}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})} = \frac{1}{4}\left(-g_{\lambda\nu}\delta^\kappa_\rho\delta^\sigma_\mu - g_{\rho\mu}\delta^\kappa_\lambda\delta^\sigma_\nu - g_{\lambda\mu}\delta^\kappa_\rho\delta^\sigma_\nu - g_{\rho\nu}\delta^\kappa_\lambda\delta^\sigma_\mu + g^{\sigma\kappa}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + g^{\sigma\kappa}g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu}\right). \tag{45.9}$$

Durch Einsetzen in (45.5) folgt die kovariante Darstellung

Inserting this into (45.5) yields the covariant representation

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}L_{\mathrm{F}} + 2\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\mu\nu}} + \sum_a\left(M_a u_{a\mu}u_{a\nu} - 2\frac{\partial M_a}{\partial g^{\mu\nu}}c^2\right)\delta_a(x) \\
&+ \frac{1}{2}\left(-(g_{\lambda\mu}A_{i\nu} + g_{\lambda\nu}A_{i\mu})(\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\kappa;\lambda}} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\kappa}}) + g^{\sigma\kappa}A_{i\sigma}(g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\lambda;\rho}}\right)_{;\kappa}.
\end{aligned} \tag{45.10}$$

Man beachte, dass der unterklammerte Ausdruck von (45.5) verschwindet. Mit (vgl. Gln. 34.52 und 34.53)

Note that the underbraced expression in (45.5) vanishes. With (compare Eqs. 34.52 and 34.53)

$$\hat{\psi}^{\mu\kappa\nu} = \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial(D_\kappa A_{i\nu})}A_i{}^\mu = \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\nu;\kappa}}A_i{}^\mu \tag{45.11}$$

und

and

$$\psi^{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(-\hat{\psi}^{\nu\kappa\mu} + \hat{\psi}^{\mu\kappa\nu} - \hat{\psi}^{\nu\mu\kappa} - \hat{\psi}^{\mu\nu\kappa} + \hat{\psi}^{\kappa\mu\nu} + \hat{\psi}^{\kappa\nu\mu}) \tag{45.12}$$

können wir den Tensor T in der Form

the tensor T may be written

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}L_{\mathrm{F}} + 2g^{\mu\kappa}g^{\nu\rho}\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\kappa\rho}} + \sum_a\left(M_a u^\mu_a u^\nu_a - 2g^{\mu\kappa}g^{\nu\rho}\frac{\partial M_a}{\partial g^{\kappa\rho}}c^2\right)\delta_a(x) + (\psi^{\mu\nu\kappa} - \hat{\psi}^{\mu\kappa\nu})_{;\kappa} \tag{45.13}$$

schreiben.

.

45.b Vergleich mit der speziellen Relativitätstheorie

45.b Comparison with the Special Theory of Relativity

Die Form (45.13) unterscheidet sich wesentlich von der Form des Energie-Impuls-Tensors, die wir in Abschnitt 34 erhalten hatten. Wir formen daher den Tensor um. Dabei verwenden wir, dass die L -Dichte des Feldes ein Skalar ist. Analog zu den Überlegungen bei (44.30) gilt daher

The form (45.13) differs essentially from the form of the energy-momentum tensor we obtained in section 34. Thus we convert the tensor. We use that the L - an density is a scalar. In analogy to the considerations around (44.30) we have

$$\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\kappa\rho}} g^{\nu\rho} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\rho\kappa}} g^{\rho\nu} = \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\kappa} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\nu}} A_{i\kappa} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\nu;\rho}} A_{i\kappa;\rho} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\rho;\nu}} A_{i\rho;\kappa} \tag{45.14}$$

Unter Verwendung der Symmetrie von g und der Bewegungsgleichung für $A_{i\kappa}$ erhalten wir

Using the symmetry of g and the equation of motion for $A_{i\kappa}$ we obtain

$$2\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial g^{\kappa\rho}} g^{\nu\rho} = \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\kappa} + \hat{\psi}_{\kappa}{}^{\rho\nu}{}_{;\rho} + \frac{\partial M_a}{\partial A_{i\nu}} A_{i\kappa} c^2 \delta_a(x) + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\rho;\nu}} A_{i\rho;\kappa}. \tag{45.15}$$

Weiter verwenden wir

Further we use

$$2g^{\mu\kappa} g^{\nu\rho} \frac{\partial M_a}{\partial g^{\kappa\rho}} = -2\frac{\partial M_a}{\partial g_{\mu\nu}} = g^{\kappa\mu}\left(\frac{\partial M_a}{\partial A_{i\nu}} A_{i\kappa} - \frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} u^{\nu}\right) \tag{45.16}$$

und erhalten durch Einsetzen in (45.13)

and obtain by inserting into (45.13)

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} L_{\mathrm{F}} + g^{\mu\kappa}\left(\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\kappa} + \hat{\psi}_{\kappa}{}^{\rho\nu}{}_{;\rho} + \frac{\partial M_a}{\partial A_{i\nu}} A_{i\kappa} c^2 \delta_a(x) + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\rho;\nu}} A_{i\rho;\kappa}\right) \\ &+ \psi^{\mu\nu\kappa}{}_{;\kappa} - \hat{\psi}^{\mu\kappa\nu}{}_{;\kappa} + \sum_a \left(M_a u_a^{\mu} u_a^{\nu} - g^{\kappa\mu}\frac{\partial M_a}{\partial A_{i\nu}} A_{i\kappa} c^2 + g^{\kappa\mu}\frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} u^{\nu} c^2\right)\delta_a(x). \end{aligned} \tag{45.17}$$

Einige Beiträge heben sich weg und es bleibt

Some contributions cancel and we are left with

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} L_{\mathrm{F}} + g^{\mu\kappa}\left(\frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\kappa} + \frac{\partial L_{\mathrm{F}}}{\partial A_{i\rho;\nu}} A_{i\rho;\kappa}\right) \\ &+ \psi^{\mu\nu\kappa}{}_{;\kappa} + \sum_a \left(M_a u_a^{\mu} u_a^{\nu} + g^{\kappa\mu}\frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} u^{\nu} c^2\right)\delta_a(x). \end{aligned} \tag{45.18}$$

In der Klammer mit der Summe über a erwartet man im Vergleich zu (34.36) $P_a^{\mu} u_a^{\nu} \delta_a(x)$ mit (34.15)

Inside the bracket with the sum over a one expects in comparison to (34.36) $P_a^{\mu} u_a^{\nu} \delta_a(x)$ with (34.15)

$$P_a^{\mu} = M_a u_a^{\mu} + g^{\kappa\mu}\frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} c^2 - \frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} u^{\kappa} u^{\mu}. \tag{45.19}$$

Der letzte Term dieses Ausdrucks fehlt in (45.18). Man kann ihn aber immer hinzufügen, da $u^{\mu} u_{\mu} = c^2$, eine Variation von u also nur mit dieser Nebenbedingung möglich ist. Für festes g gilt $u^{\mu}\delta u_{\mu} = 0$ und damit verschwindet der letzte Term bei zulässigen Variationen von u,

The last term of this expression is missing in (45.18). One may add it, since $u^{\mu} u_{\mu} = c^2$; thus a variation of u is only possible under this constraint. For fixed g one has $u^{\mu}\delta u_{\mu} = 0$ and thus the last term vanishes for admissible variations of u,

$$-\frac{\partial M_a}{\partial u^{\lambda}} u^{\lambda} u^{\mu} \delta u_{\mu} = 0. \tag{45.20}$$

Es ist allerdings sinnvoll, die Ableitungen von M_a nach u in der Kombination

However, it makes sense to use the derivatives of M_a with respect to u in the combination

$$g^{\kappa\mu}\frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} c^2 - \frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} u^{\kappa} u^{\mu} = g^{\mu\kappa} u^{\lambda}\left(\frac{\partial M_a}{\partial u^{\kappa}} u_{\lambda} - \frac{\partial M_a}{\partial u^{\lambda}} u_{\kappa}\right) \tag{45.21}$$

zu verwenden. Den Ausdruck in der Klammer erhält man, wenn man die Variation $\delta u^\kappa = \epsilon u_\lambda$, $\delta u^\lambda = -\epsilon u_\kappa$ mit infinitesimalem ϵ durchführt, die der Bedingung $u^\mu u_\mu = c^2$ genügt, da $u_\mu \delta u^\mu = 0$ erfüllt ist. Damit werden bei diesem Ausdruck nur die Ableitungen im Unterraum $u^\mu u_\mu = c^2$ benötigt, in dem M_a physikalisch auch nur definiert ist. Damit erhält man schließlich

. One obtains the expression in paranthesis, if one performs a variation $\delta u^\kappa = \epsilon u_\lambda$, $\delta u^\lambda = -\epsilon u_\kappa$ with infinitesimal ϵ, which obeys the condition $u^\mu u_\mu = c^2$, since $u_\mu \delta u^\mu = 0$ is fulfilled. Therefore in this expression only derivatives are used in the subspace $u^\mu u_\mu = c^2$, in which M_a is physically defined. Thus we finally obtain

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} L_{\rm F} + g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial L_{\rm F}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\kappa} + \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial A_{i\rho;\nu}} A_{i\rho;\kappa} \right) + \psi^{\mu\nu\kappa}{}_{;\kappa} + \sum_a P^\mu_a u^\nu_a \delta_a(x). \qquad (45.22)$$

Dieser Ausdruck geht im Grenzfall der speziellen Relativitätstheorie, also im Fall einer ebenen Metrik in den im Abschnitt 34 erhaltenen Energie-Impuls-Tensor über. Daher ist die Definition dieses Tensors über die Variation der Lagrange-Dichte $L_{\rm mF}$ nach der Metrik in Übereinstimmung mit dem früher hergeleiteten Tensor.

This expression reduces in the limit of special relativity, that is in the case of a flat metric, to the energy-momentum tensor given in 34. Thus the definition of the tensor by means of the variation of the L - an density $L_{\rm mF}$ with respect to the metric is in agreement with the tensor we have derived before.

45.c Divergenz des Tensors

45.c Divergence of the Tensor

Wir zeigen nun, dass die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors verschwindet,

We now show that the divergence of the energy-momentum tensor vanishes

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0. \qquad (45.23)$$

Hierzu beginnen wir mit der kovarianten Ableitung von $L_{\rm F}$, die in dem Ausdruck für T auftritt,

We start by considering the covariant derivative of $L_{\rm F}$ which appears in the expression for T,

$$L_{{\rm F};\mu} = \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial \Phi_i} \Phi_{i;\mu} + \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\nu;\mu} + \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial A_{i\lambda}} A_{i\lambda;\mu} + \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial A_{i\lambda;\nu}} A_{i\lambda;\nu;\mu} + \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial g^{\kappa\lambda}} g^{\kappa\lambda}{}_{;\mu} \qquad (45.24)$$

Wir verwenden nun die Bewegungsgleichungen für Φ_i und $A_{i\lambda}$ und berücksichtigen, dass

Now we use the equations of motion for Φ_i and $A_{i\lambda}$ and take into account that

$$\Phi_{i;\nu;\mu} = \Phi_{i;\mu;\nu}, \quad A_{i\lambda;\nu;\mu} = A_{i\lambda;\mu;\nu} + R_{\rho\lambda\nu\mu} A^\rho_i, \quad g^{\kappa\lambda}{}_{;\mu} = 0 \qquad (45.25)$$

und erhalten damit

and obtain

$$L_{{\rm F};\mu} = \left(\frac{\partial L_{\rm F}}{\partial \Phi_{i;\nu}} \Phi_{i;\mu} + \frac{\partial L_{\rm F}}{\partial A_{i\lambda;\nu}} A_{i\lambda;\mu} \right)_{;\nu} + \left(\frac{\partial M_a}{\partial \Phi_i} \Phi_{i;\mu} + \frac{\partial M_a}{\partial A_{i\lambda}} A_{i\lambda;\mu} \right) c^2 \delta_a(x) + R_{\rho\lambda\nu\mu} \hat{\psi}^{\rho\nu\lambda}. \qquad (45.26)$$

Eingesetzt in (45.18) und unter Verwendung der Bewegungsgleichungen für die Massen erhalten wir

Substituted in (45.18) and using the equations of motion for the masses we obtain

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = \sum_a \left(-K_{a\nu} \delta_a(x) + (P_{a\mu} j^\nu_a)_{;\nu} \right) - R_{\rho\lambda\nu\mu} \hat{\psi}^{\rho\nu\lambda} + \psi_\mu{}^{\nu\kappa}{}_{;\kappa;\nu} \qquad (45.27)$$

mit der Teilchenstromdichte

with the particle-current density

$$j^\nu_a = u^\nu \delta_a(x). \qquad (45.28)$$

Für diese Teilchenstromdichte zeigen wir unten (Gl. 45.37), dass sie divergenzfrei ist,

We argue below that this particle-current density (eq. 45.37) is divergence free

$$D_\nu j^\nu_a = 0. \qquad (45.29)$$

Damit folgt

Thus we obtain

$$(P_{a\mu} j^\nu_a)_{;\nu} = u^\nu P_{a\mu;\nu} \delta_a(x) = D_\tau P_{a\mu} \delta_a(x) = K_{a\mu} \delta_a(x), \qquad (45.30)$$

so dass die beiden Terme unter der Summe über die Massen a in (45.27) wegfallen und

so that both terms in the sum over the masses a cancel in (45.27) and

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = -R_{\rho\lambda\nu\mu}\hat\psi^{\rho\nu\lambda} + \psi_\mu{}^{\nu\kappa}{}_{;\kappa;\nu} \tag{45.31}$$

bleibt. Da $\psi_\mu{}^{\nu\kappa}$ in den Indizes ν und κ antisymmetrisch ist, fällt dieser Term in der speziellen Relativitätstheorie weg, so dass wir im krümmungsfreien Raum wieder den Erhaltungssatz $\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0$ haben. Im gekrümmtem Raum ist nun zu zeigen, dass die rechte Seite von (45.31) wegfällt. Hierzu setzen wir den Ausdruck für ψ, Gl. (45.12) ein, wobei ich bei den Beiträgen mit positivem Vorzeichen die Summations-Indizes ν und κ tausche,

is left. The term containing $\psi_\mu{}^{\nu\kappa}$ cancels in special relativity since it is antisymmetric in the indices ν und κ. Thus we obtain again the conservation law $\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0$ in flat space. Now we have to show that in curved space the right-hand side of (45.31 cancels. For this purpose we insert the expression for ψ, eq. (45.12), where I exchange the summation indices ν und κ in the contributions with positive sign,

$$\begin{aligned}
& -R_{\rho\lambda\nu}{}^{\mu}\hat\psi^{\rho\nu\lambda} + \psi^{\mu\nu\kappa}{}_{;\kappa;\nu}\\
=\;& -R_{\rho\lambda\nu}{}^{\mu}\hat\psi^{\rho\nu\lambda} + \frac12(-\hat\psi^{\mu\nu\kappa}{}_{;\kappa;\nu} + \hat\psi^{\mu\nu\kappa}{}_{;\nu;\kappa}) + \frac12(-\hat\psi^{\nu\kappa\mu}{}_{;\kappa;\nu}+\hat\psi^{\nu\kappa\mu}{}_{;\nu;\kappa}) + \frac12(-\hat\psi^{\nu\mu\kappa}{}_{;\kappa;\nu}+\hat\psi^{\nu\mu\kappa}{}_{;\nu;\kappa})\\
=\;& R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\kappa\lambda\nu} + \frac12(R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\lambda\nu\kappa} + R_\lambda{}^\nu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\mu\lambda\kappa} + R_\lambda{}^\kappa{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\mu\nu\lambda}\\
+\;& R_\lambda{}^\nu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\lambda\kappa\mu} + R_\lambda{}^\kappa{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\nu\lambda\mu} + R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\nu\kappa\lambda}\\
+\;& R_\lambda{}^\nu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\lambda\mu\kappa} + R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\nu\lambda\kappa} + R_\lambda{}^\kappa{}_{\nu\kappa}\hat\psi^{\nu\mu\lambda}
\end{aligned} \tag{45.32}$$

$$\begin{aligned}
=\;& \frac12 R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}(2\hat\psi^{\kappa\lambda\nu}+\hat\psi^{\lambda\nu\kappa}+\hat\psi^{\nu\kappa\lambda}+\hat\psi^{\nu\lambda\kappa})\\
-\;& \frac12 R_{\lambda\kappa}(\hat\psi^{\mu\lambda\kappa}+\hat\psi^{\lambda\kappa\mu}+\hat\psi^{\lambda\mu\kappa})\\
+\;& \frac12 R_{\lambda\nu}(\hat\psi^{\mu\nu\lambda}+\hat\psi^{\nu\lambda\mu}+\hat\psi^{\nu\mu\lambda}).
\end{aligned} \tag{45.33}$$

Benennt man in den $R_{\lambda\kappa}$-Termen κ in ν um, so hebt sich dieser gegen den folgenden Term weg, wenn man berücksichtigt, dass man wegen der Symmetrie des R -Tensors die Indizes λ und ν austauschen kann. Bei den $R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}$-Beiträgen kann man zunächst wegen der Antisymmetrie in ν und κ den letzten Term $\hat\psi^{\nu\lambda\kappa}$ durch $-\hat\psi^{\kappa\lambda\nu}$ ersetzen. Damit erhält man dann

If one renames κ into ν in the $R_{\lambda\kappa}$ terms, then they cancel against the following term, if one considers that due to the symmetry of the R tensor the indices λ and ν can be exchanged. Since $R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}$ is antisymmetric in ν and κ one may replace $\hat\psi^{\nu\lambda\kappa}$ by $-\hat\psi^{\kappa\lambda\nu}$ in the terms multiplied by this R tensor. Then one obtains

$$\frac12 R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}(\hat\psi^{\kappa\lambda\nu}+\hat\psi^{\lambda\nu\kappa}+\hat\psi^{\nu\kappa\lambda}) = \frac12(R_\lambda{}^\mu{}_{\nu\kappa}+R_\kappa{}^\mu{}_{\lambda\nu}+R_\nu{}^\mu{}_{\kappa\lambda})\hat\psi^{\kappa\lambda\nu} = 0, \tag{45.34}$$

wobei wir die Indizes κ, λ, ν zyklisch vertauscht haben. Dieser Ausdruck verschwindet dann auf Grund der Identität (41.14). Damit haben wir (45.23) gezeigt.

where the indices κ, λ, ν have been cyclically permuted. This expression vanishes due to the identity (41.14). Thus we have shown (45.23).

45.d Erhaltungs-Sätze und Reparametrisierungs-Invarianz

45.d Conservation Laws and Reparametrization Invariance

45.d.α Ladungs-Erhaltung

45.d.α Charge Conservation

Für elektrische Ladungen haben wir einen Erhaltungs-Satz. Wir schreiben den Vierer-Vektor der Ladungsstromdichte für Ladungen q_a als

There is a conservation law for electric charges. The four-vector of the charge-current density of charges q_a reads

$$j^\mu(x) = \sum_a q_a u_a^\mu \delta_a(x) = \sum_a q_a \dot x_a^\mu \frac{1}{\sqrt{-g}} \prod_\alpha \delta(x^\alpha - x_a^\alpha). \tag{45.35}$$

Wir betrachten die Divergenz der Stromdichte

We consider the divergence of the current density

$$D_\mu j^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}j^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_a q_a \partial_\mu(\dot{x}_a^\mu \prod_\alpha \delta(x^\alpha - x_a^\alpha)). \tag{45.36}$$

Ähnlich wie in (32.29) zeigt man, dass $\partial_\mu(\dot{x}_a^\mu \prod_\alpha \delta(x^\alpha - x_a^\alpha)) = 0$, so dass

Similarly as in (32.29) one shows that $\partial_\mu(\dot{x}_a^\mu \prod_\alpha \delta(x^\alpha - x_a^\alpha)) = 0$, so that

$$D_\mu j^\mu = 0. \tag{45.37}$$

erfüllt ist. Dies beinhaltet einen Erhaltungssatz. Das G sche Theorem ergibt für einen Vektor A im gekrümmten Raum

holds. This implies a conservation law. G theorem implies for a vector A in curved space

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}D_\mu A^\mu = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu) = \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\sqrt{-g}A^0 + \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\sqrt{-g}A^1 + \ldots. \tag{45.38}$$

Die Punkte deuten entsprechende Beiträge für A^2 und A^3 an. Dabei sind die A^μ an der oberen Grenze mit positivem und an der unteren mit negativem Vorzeichen zu berücksichtigen. Das Integral von $A^0 = j^0$ ergibt dann

The dots stand for the corresponding contributions for A^2 and A^3. The A^μ have to be taken into account at the upper limit with positive sign and at the lower limit with negative sign. The integral of $A^0 = j^0$ yields

$$\int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\dot{x}_a^0 \sum q_a \prod_\alpha \delta(x^\alpha - x_a^\alpha) = c\sum q_a, \tag{45.39}$$

also tatsächlich die Ladung (multipliziert mit c). Die anderen Beiträge geben die Ladungsströme an, die durch die Oberfläche von Ω fließen.

and thus the charge (multiplied by c). The other contributions indicate the charge currents flowing through the surface of Ω.

45.d.β Reparametrisierungs-Invarianz

45.d.β Reparametrization Invariance

Man könnte nun meinen, dass $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ den Erhaltungssatz für Energie und Impuls darstellt, wie er uns aus der speziellen Relativitäts-Theorie bekannt ist. Dies ist aber nicht der Fall. Man hat

One could assume that $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ represents the conservation of energy and momentum, as we know it from special relativity. This, however, is not the case. One has

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}T^{\kappa\nu}. \tag{45.40}$$

Wäre der zweite Term auf der rechten Seite nicht, dann hätte man den Erhaltungssatz. Tatsächlich verletzt aber der zweite Term die Erhaltung. Grundsätzlich ist eine Erhaltung skalarer Größen, wie der elektrischen Ladung in der allgemeinen Relativitätstheorie möglich. Dagegen ist das nicht für vektorielle Größen möglich. Das grundsätzliche Problem besteht darin, dass man vektorielle Größen wie Energie-Impuls nicht eindeutig parallel verschieben kann. Allerdings kann man für ein System, das nach außen hin flach wird, die Energie als Erhaltungsgröße einführen.

If the second term on the right hand-side were absent, then we had a conservation law. This second term, however, violates conservation. The conservation of scalar quantities like the electric charge is quite generally possible in general relativity. This is no longer true for vectorial quantities. The fundamental problem is, that a vectorial quantity like energy-momentum cannot be parallel-displaced in a unique way. It is possible, however, to introduce energy and momentum as conserved quantities in systems which become sufficiently flat at large distances.

Allerdings hängt die Beobachtung, dass $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ mit einer anderen Eigenschaft der Theorie zusammen, der Reparametrisierungs-Invarianz, das heißt der Invarianz gegen Einführung andere Koordinaten. Wir wollen diese nun infinitesimal variieren. Setzen wir

The observation that $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ is related to another property of the theory, the reparametrization invariance, that is the invariance against introduction of other coordinates. We would like to vary them infinitesimally. We put

$$x = x' + \xi(x') \tag{45.41}$$

mit infinitesimalem ξ, dann folgt zunächst

with infinitesimal ξ, then we obtain first

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}g_{\kappa\lambda}(x) = (\delta^\lambda_\mu + \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x'^\mu})(\delta^\kappa_\nu + \frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x'^\nu})g_{\kappa\lambda}(x) = g_{\mu\nu}(x) + g_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x'^\nu}. \qquad (45.42)$$

Interessieren wir uns nun für g' am Ort x, dann folgt

If we are interested in g' at position x then one obtains

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') + \xi^\kappa\partial_\kappa g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \xi^\kappa g_{\mu\nu,\kappa} + g_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\mu} + g_{\mu\kappa}\xi^\kappa_{,\nu}. \qquad (45.43)$$

Dabei haben wir in den Termen erster Ordnung in ξ die Unterscheidung zwischen x und x' weggelassen, da diese zweiter Ordnung in ξ ist. Das Ergebnis können wir auch

Here we have left out the distinction between x and x' in the first order terms in ξ, since they are of second order in ξ. We may write the result

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\kappa}\xi^\kappa_{;\nu} + g_{\nu\lambda}\xi^\lambda_{;\mu} = g_{\mu\nu}(x) + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \qquad (45.44)$$

schreiben. Unter dieser Transformation der Metrik bleibt die Wirkung erhalten. Unter Verwendung von $\delta g^{\cdot\cdot} = -g^{\cdot\cdot}\delta g_{\cdot\cdot}g^{\cdot\cdot}$ folgt für die Variation der Wirkung

. The action is conserved under this transformation of the metric. Using $\delta g^{\cdot\cdot} = -g^{\cdot\cdot}\delta g_{\cdot\cdot}g^{\cdot\cdot}$ one obtains for the variation of the action

$$\delta I_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2c}\int \mathrm{d}x^4\,\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \qquad (45.45)$$

Wir setzen nun $\delta g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ ein und erhalten

Now we insert $\delta g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ and obtain

$$\begin{aligned}\delta I_{\mathrm{F}} &= -\frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}T^{\mu\nu}(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu} \\ &= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\Big(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi_\mu\Big)_{;\nu} + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\Big(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\Big)_{;\nu}\xi_\mu. \qquad (45.46)\end{aligned}$$

Das erste Integral ist ein Raumintegral über eine Divergenz. Setzen wir an der Begrenzung $\xi = 0$, so verschwindet es. Das zweite Integral verschwindet für beliebiges ξ nur unter der Bedingung $(\sqrt{-g}T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$. Da $\sqrt{-g}_{;\nu} = 0$ wegen $g_{\mu\nu;\kappa} = 0$, folgt Gleichung (45.23). Dies ist auch der Grund, warum die Divergenz des E -Tensors (42.27) verschwindet. Voraussetzung für die Gültigkeit von (45.23) ist die Erfüllung der Bewegungs-Gleichungen für die anderen Felder.

The first integral is a volume integral over a divergence. It vanishes, if we require $\xi = 0$ at the boundary. The second integral only vanishes for arbitrary ξ under the condition $(\sqrt{-g}T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$. Eq. (45.23) follows, since $\sqrt{-g}_{;\nu} = 0$ holds because of $g_{\mu\nu;\kappa} = 0$. This is also the reason why the divergence of the E - tensor (42.27) vanishes. Prerequisite for the validity of eq. (45.23) is, that the other fields obey their equations of motion.

45.d.γ Anfangswert-Problem

45.d.γ Initial Value Problem

Wir betrachten jetzt die Lösung der E schen Bewegungs-Gleichungen als Funktion von x^0. Wir nehmen an, es sei als Anfangswert-Problem die Metrik $g_{\mu\nu}(x^0 = 0)$ und deren Zeitableitung $\partial_0 g_{\mu\nu}|_{x^0=0}$ gegeben. Wir wollen nun die zeitliche Änderung von g, also seine zweite Zeitableitung bestimmen. Die zweiten Zeitableitungen treten nur in der ersten Klammer von (41.12) auf

We consider the solution of E 's equations of motion as a function of x^0. We assume that the metric $g_{\mu\nu}(x^0 = 0)$ and its time derivative $\partial_0 g_{\mu\nu}|_{x^0=0}$ are given as an initial value problem. We wish to determine the temporal change of g that is its second time derivative. Second derivatives only appear in the first bracket of (41.12)

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu g_{\mu\kappa}\Big) + \Gamma\Gamma. \qquad (45.47)$$

Man sieht leicht, dass sich die Terme zweiter Ableitung wegkürzen, wenn drei oder vier der Indices $\lambda, \mu, \nu, \kappa$ übereinstimmen. Daher treten keine zweiten Ableitungen $\partial_0\partial_0 g_{0\mu}$ auf. Wir können daher zum Beispiel die sechs Gleichungen (43.6)

One easily sees that the second derivatives cancel when three or four of the indices $\lambda, \mu, \nu, \kappa$ coincide. Thus no derivatives $\partial_0\partial_0 g_{0\mu}$ appear. We may for example use the six equations (43.6)

$$Q^{\alpha\beta} = 0, \quad Q^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} - \frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}T^{\mu\nu} \qquad (45.48)$$

verwenden, um $\partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta}$ zu berechnen. Dass die zweiten Ableitungen $\partial_0\partial_0 g_{0\mu}$ unbestimmt sind, liegt daran, dass wir die Freiheit der Reparametrisierung der Koordinaten x^μ haben. Allerdings können wir uns davon überzeugen, dass unabhängig von der Wahl dieser zweiten Ableitungen die vier Bewegungs-Gleichungen $Q_{\mu 0} = 0$ erfüllt sind. Dafür sorgen die identisch erfüllten Gleichungen $Q^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Aus diesen folgt nämlich

in order to calculate $\partial_0\partial_0 g_{\alpha\beta}$. The second derivatives $\partial_0\partial_0 g_{0\mu}$ are undetermined, since we have the freedom of reparametrizing the coordinates x^μ. We may convince ourselves that the four equations of motion $Q_{\mu 0} = 0$ are fulfilled independent of the choice of these second derivatives. The identically fulfilled equations $Q^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ take care of this. From these one obtains

$$\partial_0(\sqrt{-g}Q^{\mu 0}) = -\partial_\alpha(\sqrt{-g}Q^{\mu\alpha}) + \sqrt{-g}\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}Q^{\nu\kappa} \tag{45.49}$$

und mit $Q^{\alpha\beta} = 0$

$$\partial_0(\sqrt{-g}Q^{\mu 0}) = 2\sqrt{-g}\Gamma^\mu{}_{\alpha 0}Q^{\alpha 0} + \sqrt{-g}\Gamma^\mu{}_{00}Q^{00} \tag{45.50}$$

mit der offensichtlichen Lösung $Q^{\mu 0} = 0$, vorausgesetzt, die Bedingung $Q^{\mu 0} = 0$ war zur Anfangs-Zeit $x^0 = 0$ erfüllt.

with the obvious solution $Q^{\mu 0} = 0$, provided the conditions $Q^{\mu 0} = 0$ were fulfilled at the initial time $x^0 = 0$.

45.d.δ Eichungen

Um die Eichung festzulegen, kann man verschiedene Eich-Bedingungen einführen. Als erstes kommt einem vielleicht die Zeit-Eichung in den Sinn

45.d.δ Gauges

In order to fix the gauge one can introduce various gauge conditions. At first glance one may think about the temporal gauge

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\mu} = 0. \tag{45.51}$$

In diesem Koordinaten-System wird eine Masse, die anfangs in Ruhe ist, gemäß (39.14) wegen $\Gamma^\mu{}_{00} = 0$ auch in Ruhe bleiben. Die Kurven $x^\alpha = \text{const}$ sind daher geodätische Linien. Da wir wissen, dass die Massen unter Gravitation komplizierte Bewegungen ausführen können, wird diese Eichung zu singulären Koordinaten führen.
Eine andere Wahl ist die Eichung

In this coordinate frame a mass initially at rest will according to (39.14) because of $\Gamma^\mu{}_{00} = 0$ stay at rest. The curves $x^\alpha = \text{const}$ are geodesic lines. Since we know that masses can perform complicated movements in gravitational fields, such a gauge will lead to singular coordinates.

Another choice would be the gauge

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0, \tag{45.52}$$

die den Vorteil der Lorentz-Invarianz hat.
Auch die harmonische oder D D Eichung ist häufig recht nützlich

which has the advantage of being Lorentz invariant.
The harmonic or D D gauge is often rather useful, too

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0. \tag{45.53}$$