M

Gravitation

Gravitation

©2005 Franz Wegner Universität Heidelberg

46 Schwache Gravitationsfelder

Wir gehen aus von den Einsteinschen Gravitations-Gleichungen

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \tag{46.1}$$

Wir zerlegen den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{46.2}$$

Für schwache Gravitationsfelder brauchen wir nur Beiträge erster Ordnung in h zu berücksichtigen. In dieser Ordnung erhalten wir die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{\kappa\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h_{\kappa\nu} + \partial_\nu h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa h_{\mu\nu}\right). \tag{46.3}$$

Zur Berechnung des Krümmungstensors brauchen wir dann nur die beiden $\partial\Gamma$-Terme in (41.12) zu berücksichtigen

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\kappa h_{\mu\lambda} + \partial_\mu\partial_\lambda h_{\nu\kappa} - \partial_\nu\partial_\lambda h_{\mu\kappa} - \partial_\mu\partial_\kappa h_{\nu\lambda}\right). \tag{46.4}$$

Durch Verjüngung folgt

$$R_{\nu\lambda} = R_{\mu\nu\ \lambda}^{\ \ \mu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial^\mu h_{\mu\lambda} + \partial^\mu\partial_\lambda h_{\nu\mu} - \partial_\nu\partial_\lambda h_\mu^{\ \mu} - \partial^\mu\partial_\mu h_{\nu\lambda}\right) = \frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}(T_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}T). \tag{46.5}$$

Dabei ziehen wir die Indizes von h mit η hinauf und hinunter, $h_\mu^{\ \mu} = \eta^{\mu\kappa}h_{\kappa\mu}$. Wenn wir

$$b_\lambda := \partial^\mu h_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\mu_{\ \ \mu} \tag{46.6}$$

einführen, können wir die Gleichung auch

$$\partial_\nu b_\lambda + \partial_\lambda b_\nu - \partial^\mu\partial_\mu h_{\nu\lambda} = \frac{16\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}(T_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}T) \tag{46.7}$$

schreiben.

46 Weak Gravitational Fields

We start from Einstein's gravitational equations

We decompose the metric tensor

For weak gravitational fields it is sufficient to consider only linear contributions in h. The Christoffel symbols read in this order

Then we need only to take into account the two $\partial\Gamma$ terms in (41.12)

Contraction yields

Here we lift and lower the indices of h with η, $h_\mu^{\ \mu} = \eta^{\mu\kappa}h_{\kappa\mu}$. If we introduce

then we may rewrite the equation

.

46.a Gravitationswellen

Wir betrachten zunächst freie Gravitationswellen. Wir setzen diese Wellen als ebene Wellen an

$$h_{\mu\nu}(x) = \hat{h}_{\mu\nu} e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} \tag{46.8}$$

und analog für b an. Wir erhalten dann

$$\mathrm{i}(k_\nu \hat{b}_\lambda + k_\lambda \hat{b}_\nu) + k^\mu k_\mu \hat{h}_{\nu\lambda} = 0, \quad \hat{b}_\lambda = \mathrm{i}k^\mu \hat{h}_{\mu\lambda} - \frac{\mathrm{i}}{2} k_\lambda \hat{h}^\mu{}_\mu. \tag{46.9}$$

Wir betrachten zunächst $k_\mu k^\mu \neq 0$. Dann ist

$$\hat{h}_{\nu\lambda} = \frac{-\mathrm{i}}{k^\mu k_\mu} \left(k_\nu \hat{b}_\lambda + k_\lambda \hat{b}_\nu \right) \tag{46.10}$$

oder

$$h_{\nu\lambda}(x) = -\frac{1}{k^\mu k_\mu} \left(\partial_\nu b_\lambda(x) + \partial_\lambda b_\nu(x) \right). \tag{46.11}$$

Dies erhält man jedoch durch Reparametrisierung der Raumkoordinaten. Ausgehend von $g' = \eta$ und $x' = x - \frac{1}{k^\mu k_\mu} b(x)$ erhalten wir

$$g_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} \eta_{\mu\kappa} = \left(\delta^\mu_\nu - \frac{1}{k^\rho k_\rho} \partial_\nu b^\mu(x) \right) \left(\delta^\kappa_\lambda - \frac{1}{k^\rho k_\rho} \partial_\lambda b^\kappa(x') \right) \eta_{\mu\kappa} = \eta_{\nu\lambda} - \frac{1}{k^\rho k_\rho} \left(\partial_\nu b_\lambda(x) + \partial_\lambda b_\nu(x) \right). \tag{46.12}$$

Es gibt daher keine Gravitationswellen für $k_\mu k^\mu \neq 0$. Wir betrachten jetzt den Fall $k_\mu k^\mu = 0$. In diesem Fall reduzieren sich die Gleichungen auf

$$k_\nu \hat{b}_\lambda + k_\lambda \hat{b}_\nu = 0. \tag{46.13}$$

Wir wählen nun die z-Richtung als Ausbreitungs-Richtung der Wellen,

$$(k^\mu) = (k, 0, 0, k). \tag{46.14}$$

Wählen wir der Reihe nach $(\nu, \lambda) = (0,0), (0,1), (0,2), (3,3)$, so folgt

$$\hat{b}_\nu = 0 \tag{46.15}$$

für alle ν. Hieraus erhalten wir die vier Gleichungen

$$\hat{h}_{00} + \hat{h}_{30} - \frac{1}{2} \hat{h}^\mu{}_\mu = 0, \tag{46.16}$$

$$\hat{h}_{01} + \hat{h}_{31} = 0, \tag{46.17}$$

$$\hat{h}_{02} + \hat{h}_{32} = 0, \tag{46.18}$$

$$\hat{h}_{03} + \hat{h}_{33} + \frac{1}{2} \hat{h}^\mu{}_\mu = 0. \tag{46.19}$$

Durch Addieren und Subtrahieren der ersten und letzten Gleichungen erhält man

$$\hat{h}_{00} + 2\hat{h}_{30} + \hat{h}_{33} = 0, \tag{46.20}$$

$$\hat{h}_{11} + \hat{h}_{22} = 0. \tag{46.21}$$

46.a Gravitational Waves

We consider first free gravitational waves. We write them as plane waves

and analogously for b. Then we obtain

First we consider $k_\mu k^\mu \neq 0$. Then we have

or

However, this is obtained by a reparametrization of space coordinates. Starting from $g' = \eta$ and $x' = x - \frac{1}{k^\mu k_\mu} b(x)$ we obtain

Thus there are no gravitational waves with $k_\mu k^\mu \neq 0$. Now we consider the case $k_\mu k^\mu = 0$. In this case the equations reduce to

We choose the z direction as direction of the propagation of the waves,

If we choose $(\nu, \lambda) = (0,0), (0,1), (0,2)$, and $(3,3)$ one after the other, then we obtain

for all ν. From this we obtain the four equations

Adding and subtracting the first and the last equation we obtain

Diese vier Gleichungen erlauben sechs unabhängige Lösungen, dargestellt durch die Konstanten $\hat{a}$ und $\hat{c}$,

These four equations allow for six independent solutions, represented by the constants $\hat{a}$ and $\hat{c}$,

$$\hat{h}_{11} = -\hat{h}_{22} = \hat{a}_1, \tag{46.22}$$
$$\hat{h}_{12} = \hat{a}_2, \tag{46.23}$$
$$\hat{h}_{00} = 2\hat{c}_0, \tag{46.24}$$
$$\hat{h}_{33} = -2\hat{c}_3, \tag{46.25}$$
$$\hat{h}_{03} = -\hat{c}_0 + \hat{c}_3, \tag{46.26}$$
$$\hat{h}_{01} = -\hat{h}_{31} = \hat{c}_1, \tag{46.27}$$
$$\hat{h}_{02} = -\hat{h}_{32} = \hat{c}_2. \tag{46.28}$$

Die Anteile mit den Koeffizienten $\hat{c}$ sind eine Folge der Eichungen

The contributions with the coefficients $\hat{c}$ are a consequence of the gauges

$$h_{\nu\lambda}(x) = h_{\mathrm{grv}\lambda} + \partial_\nu c_\lambda(x) + \partial_\lambda c_\nu(x) \tag{46.29}$$

mit

with

$$c_\lambda(x) = \frac{1}{\mathrm{i}k}\hat{c}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa}. \tag{46.30}$$

Als Gravitationswellen bleiben daher nur die beiden Beiträge mit den Amplituden $\hat{a}$. Sie sind offensichtlich Transversal-Wellen. Bildet man die Kombinationen $\hat{a}_2 = \pm\mathrm{i}\hat{a}_1$ und rotiert diese in der (1,2)-Ebene um einen Winkel ϕ, so ändern sie sich um einen Faktor $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\phi}$. Die z-Komponente ihres Spins (inneren Drehimpulses) ist daher $S_z = \pm 2$. Die symmetrischen Matrizen mit den Komponenten $h_{\alpha\beta}$ zerfallen unter der Drehgruppe SO(3) in eine Darstellung mit $S = 0$ (die Spur) und eine Darstellung mit $S = 2$ (die spurlosen Matrizen). Daher ist den Gravitationswellen der Spin $S = 2$ zuzuordnen. Allerdings treten nur die Komponenten $S_z = \pm 2$ auf. Dies ist ähnlich wie bei den elektromagnetischen Wellen, wo man zum Spin $S = 1$ nur die beiden transversalen Polarisationen $S_z = \pm 1$ hat.

Thus we have for gravitational waves only the two contributions with the amplitudes $\hat{a}$. They are apparently transversal waves. If we compose the combinations $\hat{a}_2 = \pm\mathrm{i}\hat{a}_1$ and rotate them in the (1,2) plane by an angle ϕ, then they change by a factor $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\phi}$. Thus the z component of its spin (internal angular momentum) is $S_z = \pm 2$. The symmetric matrices with components $h_{\alpha\beta}$ decompose under the rotational group SO(3) into a representation with $S = 0$ (the trace) and a representation with $S = 2$ (the traceless symmetric matrices). Thus we have to assign spin $S = 2$ to the gravitational waves. However, only the components $S_z = \pm 2$ appear. This is similarly to electromagnetic waves where one has spin $S = 1$ but only the two transversal polarizations $S_z = \pm 1$.

46.b Gravitationsfelder

Wir betrachten nun die inhomogenen Lösungen der Gleichung (46.7). Hierzu wollen wir die Eichbedingung $b_\nu = 0$ verlangen. Damit reduziert sich die Gleichung auf

46.b Gravitational Fields

Now we consider the inhomogeneous solutions of equation (46.7). For this purpose we require the gauge condition $b_\nu = 0$. Then the equation reduces to

$$-\partial^\mu\partial_\mu h_{\nu\lambda} = \frac{16\pi k_\mathrm{N}}{c^4}(T_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}T) \tag{46.31}$$

mit der bekannten retardierten Lösung

with the known retarded solution

$$h_{\nu\lambda}(x) = -\frac{4k_\mathrm{N}}{c^4}\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}'|}(T_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}T)(x^0 - |\mathbf{x}'|, \mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{46.32}$$

Hierbei ist $(x^0 - |\mathbf{x}'|, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ das Argument von $(T_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}T)$. Es bleibt zu zeigen, dass die Eichbedingung erfüllt ist. Wir bilden daher

Here $(x^0 - |\mathbf{x}'|, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ is the argument of $(T_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}T)$. It remains to be shown that the gauge condition is fulfilled. Thus we compose

$$b_\lambda(x) = \partial^\mu h_{\mu\lambda}(x) - \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\mu{}_\mu(x) = -\frac{4k_\mathrm{N}}{c^4}\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}'|}(\partial^\mu T_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\lambda T - \frac{1}{2}\partial_\lambda T + \partial_\lambda T)(x^0 - |\mathbf{x}'|, \mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{46.33}$$

Da $\partial^\mu T_{\mu\lambda} = 0$ ist, folgt $b_\lambda(x) = 0$, so dass (46.32) tatsächlich Lösung ist.

Since $\partial^\mu T_{\mu\lambda} = 0$ holds, we obtain $b_\lambda(x) = 0$, so that (46.32) is a solution indeed.

Wir betrachten nun den Fall einer ruhenden Masse m am Ursprung. Dann ist die einzige nicht verschwindende Komponente von T gegeben durch

Now we consider the case of a mass m at rest in the origin. Then the only non-vanishing component of T is given by

$$T_{00} = mc^2\delta^3(\mathbf{r}) \tag{46.34}$$

und die Spur $T = T_{00}$. Damit erhalten wir aus (46.32) die Lösung

and the trace $T = T_{00}$. Then we obtain from (46.32) the solution

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2}{c^2}\chi(r), \quad \chi(r) = -\frac{k_\mathrm{N} m}{r}. \tag{46.35}$$

χ hat die Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat. Multipliziert mit einer sich im Raum bewegenden Masse gibt sie das Newtonsche Gravitations-Potential. Wir stellen nun die Bewegungsgleichungen (39.11)

χ has the dimension of velocity squared. Multiplication by a mass moving in space yields the Newtonian garavitational potential. Now we state the equations of motion (39.11)

$$\ddot{x}^\lambda = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{46.36}$$

auf. Bei der Berechnung der Christoffel-Symbole können nur solche von Null verschieden sein, bei denen zwei Indizes übereinstimmen, da g diagonal ist; auch ergibt die Ableitung nach der Zeit 0. Daher erhalten wir nur folgende von Null verschiedene Christoffel-Symbole

In calculating the Christoffel symbols we realize that only those can be different from zero which agree in to indices, since g is diagonal; moreover the derivative with respect to time is 0. Thus we obtain only the following non-vanishing Christoffel symbols

$$\Gamma^0{}_{0\alpha} = \Gamma^0{}_{\alpha 0} = \frac{1}{c^2}\partial_\alpha\chi(r), \tag{46.37}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = \frac{1}{c^2}\partial_\alpha\chi(r), \tag{46.38}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{c^2}\partial_\alpha\chi(r), \tag{46.39}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{c^2}\partial_\beta\chi(r), \quad \alpha \neq \beta, \tag{46.40}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\beta} = \frac{1}{c^2}\partial_\alpha\chi(r), \quad \alpha \neq \beta. \tag{46.41}$$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

Thus we obtain the following equations of motion

$$\dot{u}^0 = c\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{2}{c^2}u^0(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\chi(r)), \tag{46.42}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{(u^0)^2 + \mathbf{u}^2}{c^2}\operatorname{grad}\chi(r) + \frac{2\mathbf{u}}{c^2}(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\chi(r)). \tag{46.43}$$

Für Massen kleiner Geschwindigkeit sind die Terme linear oder quadratisch in $\mathbf{u}$ auf der rechten Seite zu vernachlässigen. Auch der Unterschied zwischen τ und t ist vernachlässigbar. Dann folgt aus (46.43) das Newtonsche Anziehungsgesetz

For slowly moving masses the terms linear or quadratic in $\mathbf{u}$ are negligible on the right hand-side. Also the difference between τ and t is negligible. Then we obtain from (46.43) the Newtonian attraction law

$$\dot{\mathbf{u}} = -\operatorname{grad}\chi(r). \tag{46.44}$$

Wir erkennen jedoch auch, dass Abweichungen von den Newtonschen Vorstellungen auftreten.

We realize however that there are deviations from Newton's ideas.

47 Schwarzschild-Metrik

47.a Statische Metrik

Eine Metrik, die nicht von der Zeit abhängt, und für die $g_{0\alpha} = 0$ gilt, nennt man statisch. Für diese gilt

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\mathrm{d}t^2 + g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \tag{47.1}$$

In solch einer Metrik findet man außer den $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ folgende von 0 verschiedene Γs

$$\Gamma_{tt\alpha} = \Gamma_{t\alpha t} = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{tt}, \quad \Gamma_{\alpha tt} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha g_{tt} \tag{47.2}$$

und damit die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{t} = -\frac{1}{g_{tt}}\partial_\alpha g_{tt}\dot{x}^\alpha \dot{t}, \tag{47.3}$$

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{tt}\dot{t}^2 - \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \tag{47.4}$$

Die Bewegungsgleichung für t kann auch

$$\ddot{t} = -\frac{1}{g_{tt}}\frac{\mathrm{d}g_{tt}(x)}{\mathrm{d}\tau}\dot{t} \tag{47.5}$$

geschrieben und damit einmal aufintegriert werden

$$\dot{t} = \frac{k_t}{g_{tt}} \tag{47.6}$$

mit einer Integrationskonstanten k_t. Setzen wir das in die Bewegungsgleichung für x^α ein, so folgt

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = -\frac{1}{2}k_t^2\partial_\alpha g^{tt} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma. \tag{47.7}$$

g^{tt} wirkt daher wie ein Potential.

47.b Schwarzschild-Metrik

Wir betrachten jetzt eine kugelsymmetrische statische Metrik. Wir nehmen dabei an, dass alle Massen innerhalb eines Radius r_0 kugelsymmetrisch verteilt seien und untersuchen das Feld im Bereich außerhalb dieser Massen. Da das System kugelsymmetrisch ist, setzen wir an

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\mathrm{d}t^2 - B(r)\mathrm{d}r^2 - C(r)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{47.8}$$

Für diese Metrik finden wir

$$\Gamma_{rrr} = -\frac{1}{2}B', \tag{47.9}$$

$$\Gamma_{rtt} = -\frac{1}{2}A', \qquad \Gamma_{trt} = \frac{1}{2}A', \tag{47.10}$$

47 Schwarzschild Metric

47.a Static metric

A metric which does not depend on time and for which $g_{0\alpha} = 0$ holds, is called static. It reads

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\mathrm{d}t^2 + g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \tag{47.1}$$

In such a metric one finds besides the $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ the following Γs different from 0

$$\Gamma_{tt\alpha} = \Gamma_{t\alpha t} = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{tt}, \quad \Gamma_{\alpha tt} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha g_{tt} \tag{47.2}$$

and thus the equations of motion

$$\ddot{t} = -\frac{1}{g_{tt}}\partial_\alpha g_{tt}\dot{x}^\alpha \dot{t}, \tag{47.3}$$

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{tt}\dot{t}^2 - \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \tag{47.4}$$

The equation of motion for t can be written

$$\ddot{t} = -\frac{1}{g_{tt}}\frac{\mathrm{d}g_{tt}(x)}{\mathrm{d}\tau}\dot{t} \tag{47.5}$$

and thus integrated ones

$$\dot{t} = \frac{k_t}{g_{tt}} \tag{47.6}$$

with an integration constant k_t. If we insert this into the equation of motion for x^α then we obtain

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = -\frac{1}{2}k_t^2\partial_\alpha g^{tt} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma. \tag{47.7}$$

This g^{tt} acts like a potential.

47.b Schwarzschild Metric

Now we consider a spherical static metric. We assume that all masses are distributed spherically symmetric and consider the field outside these masses. Since the system is spherically symmetric we start with

$$\mathrm{d}s^2 = A(r)\mathrm{d}t^2 - B(r)\mathrm{d}r^2 - C(r)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{47.8}$$

We obtain for this metric

$$\Gamma_{rrr} = -\frac{1}{2}B', \tag{47.9}$$

$$\Gamma_{rtt} = -\frac{1}{2}A', \qquad \Gamma_{trt} = \frac{1}{2}A', \tag{47.10}$$

$$\Gamma_{r\theta\theta} = \frac{1}{2}C', \qquad \Gamma_{\theta r\theta} = -\frac{1}{2}C', \tag{47.11}$$

$$\Gamma_{r\phi\phi} = \frac{1}{2}C' \sin^2\theta, \qquad \Gamma_{\phi r\phi} = -\frac{1}{2}C' \sin^2\theta, \tag{47.12}$$

$$\Gamma_{\theta\phi\phi} = C \sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma_{\phi\theta\phi} = -C \sin\theta\cos\theta. \tag{47.13}$$

Die anderen Christoffel-Symbole verschwinden. Daraus folgen dann die Matrix-Elemente des Krümmungstensors

The other Christoffel symbols vanish. From these we obtain the matrix elements of the curvature tensor

$$R_{rtrt} = -\frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4A} + \frac{B'A'}{4B}, \tag{47.14}$$

$$R_{r\theta r\theta} = \frac{C''}{2} - \frac{C'^2}{4C} - \frac{B'C'}{4B}, \tag{47.15}$$

$$R_{r\phi r\phi} = R_{r\theta r\theta} \sin^2\theta, \tag{47.16}$$

$$R_{t\theta t\theta} = -\frac{C'A'}{4B}, \tag{47.17}$$

$$R_{t\phi t\phi} = R_{t\theta t\theta} \sin^2\theta, \tag{47.18}$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = (-C + \frac{C'^2}{4B}) \sin^2\theta. \tag{47.19}$$

Daraus erhalten wir den Ricci-Tensor

We obtain the Ricci tensor from these matrix elements

$$R_{tt} = \frac{A}{B}\left(\frac{A''}{2A} - \frac{A'^2}{4A^2} - \frac{A'B'}{4AB} + \frac{A'C'}{2AC}\right) \tag{47.20}$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} - \frac{C''}{C} + \frac{C'B'}{2CB} + \frac{C'^2}{2C^2} \tag{47.21}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{C}{B}\left(-\frac{C'A'}{4CA} - \frac{C''}{2C} + \frac{C'B'}{4CB}\right), \tag{47.22}$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2\theta. \tag{47.23}$$

Wir wollen nun bestimmen, was aus $R_{\mu\nu} = 0$ folgt. Zunächst folgt aus $R_{tt} = 0$

Now we determine what follows from $R_{\mu\nu} = 0$. From $R_{tt} = 0$ we obtain

$$\frac{A''}{A'} = \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} - \frac{C'}{C}, \tag{47.24}$$

das sich zu

which can be integrated to

$$A' = k_A \frac{\sqrt{AB}}{C} \tag{47.25}$$

mit Integrationskonstante k_A aufintegrieren lässt. Aus $\frac{B}{A}R_{tt} + R_{rr} = 0$ folgt

with integration constant k_A. We obtain from $\frac{B}{A}R_{tt} + R_{rr} = 0$

$$\frac{C''}{C'} = \frac{B'}{2B} + \frac{C'}{2C} + \frac{A'}{2A}, \tag{47.26}$$

woraus

from which we conclude

$$C' = k_C \sqrt{ABC} \tag{47.27}$$

mit Integrationskonstante k_C folgt. Setzen wir (47.26) und dann die Ausdrücke für A' und C' in $R_{\theta\theta} = 0$ ein, so folgt

with integration constant k_C. If we insert (47.26) and then the expressions for A' and C' into $R_{\theta\theta} = 0$ then we obtain

$$A = \frac{4}{k_C^2} - \frac{2k_A}{k_C\sqrt{C}}. \tag{47.28}$$

Setzen wir das noch in (47.27) ein, so folgt

Inserting this expression into (47.27) yields

$$B = \frac{C'^2}{4C - 2k_A k_C \sqrt{C}}. \tag{47.29}$$

Damit sind dann alle $R_{\mu\nu} = 0$. Eine Funktion, z.B. $C(r)$ kann man frei wählen. Dann sind die anderen bestimmt. Üblicherweise setzt man $C = r^2$. Dann folgt mit $k_C = 2/c$ und $k_A k_C = 2r_g$

Then all $R_{\mu\nu}$ vanish. One of the functions, e.g. $C(r)$ can be chosen freely. Then the other functions are determined. Usually one chooses $C = r^2$. Then one obtains with $k_C = 2/c$ und $k_A k_C = 2r_g$

$$\mathrm{d}s^2 = c^2(1 - \frac{r_g}{r})\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2). \tag{47.30}$$

Es sind zwar jetzt alle $R_{\mu\nu} = 0$, aber nicht die $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$,

Now all $R_{\mu\nu}$ vanish, but not the $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$,

$$R^{rt}{}_{rt} = R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = -\frac{r_g}{r^3}, \tag{47.31}$$

$$R^{r\theta}{}_{r\theta} = R^{r\phi}{}_{r\phi} = R^{t\theta}{}_{t\theta} = R^{t\phi}{}_{t\phi} = \frac{r_g}{2r^3}. \tag{47.32}$$

Der Raum ist also nicht eben. Man bezeichnet r_g als den Schwarzschild-Radius und die gefundene Metrik als die Schwarzschild-Metrik.

Thus the spacetime is not flat. One calls r_g the Schwarzschild radius and the metric Schwarzschild metric.

Wir vergleichen diese Metrik mit der im vorhergehenden Abschnitt gefundenen. Dazu müssen wir den Limes schwacher Felder betrachten. Zur Unterscheidung versehen wir die Abweichungen h der Metrik des letzten Abschnitts mit dem Index $^{\mathrm{w}}$ und die dieses Abschnitts mit $^{\mathrm{S}}$. Wir haben dann unter Berücksichtigung von $x^0 = ct$, also $h_{tt} = c^2 h_{00}$

We compare this metric with the metric obtained in the previous section. We have to consider the limit of weak fields. In order to distinguish them we denote the deviation h of the metric of the last section with the index $^{\mathrm{w}}$ and that of this section with $^{\mathrm{S}}$. Taking into account $x^0 = ct$, that is $h_{tt} = c^2 h_{00}$ we obtain

$$h^{\mathrm{w}}_{tt} = -\frac{2k_{\mathrm{N}}m}{r}, \quad h^{\mathrm{S}}_{tt} = -\frac{c^2 r_g}{r}. \tag{47.33}$$

Wir setzen daher den Schwarzschild-Radius

Thus we set the Schwarzschild radius

$$r_g = \frac{2k_{\mathrm{N}}m}{c^2}. \tag{47.34}$$

Für die räumlichen Freiheitsgrade haben wir

We obtain for the spacial degrees of freedom

$$h^{\mathrm{w}}_{\alpha\beta} = -\eta_{\alpha\beta}\frac{2\chi(r)}{c^2} = \eta_{\alpha\beta}\frac{2k_{\mathrm{N}}m}{c^2 r} = \eta_{\alpha\beta}\frac{r_g}{r}, \quad h^{\mathrm{S}}_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta \frac{r_g}{r}. \tag{47.35}$$

Die beiden Metriken unterscheiden sich also. Wir wissen aber, dass die Koordinaten nicht eindeutig festgelegt sind. Beachten wir, dass

Both metrics are different. We know however, that the coordinates are not uniquely fixed. If we consider that

$$\partial_\alpha n_\beta = -\partial_\alpha\left(\frac{x^\beta}{r}\right) = -\frac{\delta^\beta_\alpha - n_\alpha n^\beta}{r} = \frac{\eta_{\beta\alpha} + n_\alpha n_\beta}{r}, \tag{47.36}$$

so erhalten wir für die Differenz

then we obtain the difference

$$h^{\mathrm{w}}_{\alpha\beta} - h^{\mathrm{S}}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\xi_\beta + \partial_\beta\xi_\alpha, \quad \xi_\alpha = \frac{r_g n_\alpha}{2}. \tag{47.37}$$

Daher entspricht dies einer Reparametrisierung der Koordinaten r. Wir beobachten, dass sich für die Metrik gewaltige Veränderungen ergeben, wenn man sich der Masse bis etwa SCHWARZSCHILD-Radius nähert. Dies gilt allerdings nur, wenn die anziehende Masse selbst einen Radius kleiner oder gleich dem SCHWARZSCHILD-Radius hat, da im Inneren der Masse der Verlauf der Metrik ein anderer ist. Für die Erde errechnet sich $r_g = 0.9$ cm, für die Sonne $r_g = 3$ km. Da ihre Radien erheblich größer sind, erhält man durch diese Metrik nur kleine Korrekturen. Es gibt aber Massen, die sich auf einen Radius kleiner als den SCHWARZSCHILD-Radius zusammengezogen haben. Man nennt sie schwarze Löcher.

This corresponds to a reparametrization of the coordinate r. We observe that the metric shows large changes, if the mass approaches the SCHWARZSCHILD radius. However, this applies only if the attracting mass itself has a radius smaller or equal to the SCHWARZSCHILD radius, since the nature of the metric is different inside an extended mass. One obtains a radius $r_g = 0.9$ cm for the earth, and $r_g = 3$ km for the sun. Since their radii are considerably larger one obtains for their metric only small corrections. However, there are masses which have collapsed to a radius smaller than their SCHWARZSCHILD radius. These are called black holes.

48 Bewegung in der Schwarzschild-Metrik

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Metrik des Gravitationsfeldes einer im Zentrum ruhenden Masse m bestimmt

$$g_{tt} = c^2(1 - \frac{r_g}{r}), \quad g_{rr} = -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2\theta. \tag{48.1}$$

Dabei ist $r_g = \frac{2km}{c^2}$ der Schwarzschild-Radius.

48.a Lösung der Bewegungs-Gleichung

Aus dieser Metrik berechnet man zunächst die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{rrr} = \frac{r_g}{2(r - r_g)^2}, \qquad \Gamma^r{}_{rr} = -\frac{r_g}{2r(r - r_g)}, \tag{48.2}$$

$$\Gamma_{rtt} = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}, \qquad \Gamma^r{}_{tt} = \frac{c^2 r_g}{2r^2}(1 - \frac{r_g}{r}), \tag{48.3}$$

$$\Gamma_{trt} = \frac{c^2 r_g}{2r^2}, \qquad \Gamma^t{}_{rt} = \frac{r_g}{2r(r - r_g)}, \tag{48.4}$$

$$\Gamma_{r\theta\theta} = r, \qquad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -(r - r_g), \tag{48.5}$$

$$\Gamma_{\theta r\theta} = -r, \qquad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \tag{48.6}$$

$$\Gamma_{r\phi\phi} = r\sin^2\theta, \qquad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -(r - r_g)\sin^2\theta, \tag{48.7}$$

$$\Gamma_{\phi r\phi} = -r\sin^2\theta, \qquad \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}, \tag{48.8}$$

$$\Gamma_{\theta\phi\phi} = r^2\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{48.9}$$

$$\Gamma_{\phi\theta\phi} = -r^2\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \mathrm{ctg}\theta. \tag{48.10}$$

Alle anderen Komponenten von Γ außer denen, die durch die Symmetrie-Beziehung

$$\Gamma^\mu{}_{\kappa\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}, \qquad \Gamma_{\mu\kappa\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda\kappa} \tag{48.11}$$

übereinstimmen, verschwinden. Daraus folgen dann die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{r} = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}(1 - \frac{r_g}{r})\,\dot{t}^2 + \frac{r_g}{2r(r - r_g)}\,\dot{r}^2 + (r - r_g)\,\dot{\theta}^2 + (r - r_g)\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{48.12}$$

$$\ddot{t} = -\frac{r_g}{r(r - r_g)}\,\dot{r}\,\dot{t}, \tag{48.13}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\,\dot{r}\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{48.14}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r}\,\dot{r}\,\dot{\phi} - 2\mathrm{ctg}\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}. \tag{48.15}$$

48 Motion in the Schwarzschild Metric

In the preceeding section we have determined the metric of the gravitational field of a mass m at rest in the center

Here $r_g = \frac{2km}{c^2}$ is the Schwarzschild radius.

48.a Solution of the Equation of Motion

First one calculates the Christoffel symbols from this metric

All other components of Γ except those which agree due to the symmetry relation

vanish. By means of these Γs we obtain the equations of motion

Wir berechnen zunächst erste Integrale dieser Bewegungsgleichungen. Die Bewegung findet in einer Ebene statt, die den Ursprung enthält. Wir können zum Beispiel $\theta = \pi/2$ setzen, womit die Gleichung für θ erfüllt ist und erhalten dann aus der Gleichung für ϕ ein erstes Integral

We calculate now the first integrals of these equations of motion. The motion takes place in a plane which contains the origin. We may for example put $\theta = \pi/2$, which fulfills the equation for θ and obtain the first integral from the equation for ϕ

$$r^2\,\dot{\phi} = l. \tag{48.16}$$

Auch die Differentialgleichung für t kann einmal aufintegriert werden, da sie separabel ist. Man erhält

The differential equation for t may be integrated once since it is separable. One obtains

$$\dot{t} = \frac{\gamma r}{r - r_g}. \tag{48.17}$$

Dabei ist γ eine Integrations-Konstante. Wenn der Punkt die Ableitung nach der Eigenzeit bedeutet, dann ist für große Entfernungen $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_\infty^2/c^2}}$. Wir können diese Ergebnisse in die Bewegungsgleichung für r einsetzen und erhalten

γ is a constant of integration. If the dort denotes the derivative with respect to proper time, then we have at large distances $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_\infty^2/c^2}}$. We may insert these results into the equation of motion for r and obtain

$$\ddot{r} = \frac{r_g}{2r(r-r_g)}\,\dot{r}^2 - \frac{c^2 r_g \gamma^2}{2r(r-r_g)} + (r-r_g)\frac{l^2}{r^4}. \tag{48.18}$$

Diese können wir zunächst in der Form

We may bring this into the form

$$\left(\sqrt{\frac{r}{r-r_g}}\dot{r}\right)^{\cdot} = \sqrt{\frac{r}{r-r_g}}\left(-\frac{c^2 r_g \gamma^2}{2r(r-r_g)} + (r-r_g)\frac{l^2}{r^4}\right) \tag{48.19}$$

schreiben. Multiplizieren wir die Gleichung mit $\sqrt{\frac{r}{r-r_g}}\dot{r}$, so können wir sie aufintegrieren und erhalten

. If we multiply the equation by $\sqrt{\frac{r}{r-r_g}}\dot{r}$, then we can integrate it and obtain

$$\frac{r}{2(r-r_g)}\dot{r}^2 = C + \frac{c^2 r_g \gamma^2}{2(r-r_g)} - \frac{l^2}{2r^2}. \tag{48.20}$$

Dabei ist C eine Integrations-Konstante. Für $r \to \infty$ wird sie $\gamma^2 v^2/2$. Damit erhalten wir für $\dot{r}^2$

C is a constant of integration. For $r \to \infty$ it becomes $\gamma^2 v^2/2$. Thus we obtain for $\dot{r}^2$

$$\dot{r}^2 = \gamma^2 v^2 + \frac{c^2 r_g}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^2 r_g}{r^3}. \tag{48.21}$$

Diese Bewegungsgleichung unterscheidet sich von der nichtrelativistischen durch den letzten Term $\frac{l^2 r_g}{r^3}$. Wir erhalten damit für die Bahnkurve

This equation of motion differs from the non-relativistic one by the last term $\frac{l^2 r_g}{r^3}$. We obtain for the orbit

$$\frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{l}{r^2\sqrt{\gamma^2 v^2 + \frac{c^2 r_g}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^2 r_g}{r^3}}}. \tag{48.22}$$

48.b Gebundene Bahnen

Betrachten wir eine gebundene Bahn, das heißt eine Bahn, bei der die Masse einen Mindestabstand r_1 und einen Maximalabstand r_2 erreicht. Dann können wir $\gamma^2 v^2$ und l^2 durch r_1 und r_2 ausdrücken, da $\dot{r}(r_1) = \dot{r}(r_2) = 0$ ist. Daraus folgt

48.b Bound Orbits

Consider a bound orbit that is an orbit where the mass assumes a minimum distance r_1 and a maximal distance r_2. Then we can express $\gamma^2 v^2$ and l^2 by r_1 and r_2, since there one has $\dot{r}(r_1) = \dot{r}(r_2) = 0$. This yields

$$\gamma^2 v^2 = -\frac{c^2 r_g (r_1 r_2 - r_1 r_g - r_2 r_g)}{N}, \tag{48.23}$$

$$l^2 = \frac{c^2 r_g r_1^2 r_2^2}{N}, \tag{48.24}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{c^2 r_g (r_2 - r)(r - r_1)(r r_1 r_2 - r_g(r r_1 + r r_2 + r_1 r_2))}{N r^3}, \tag{48.25}$$

$$N = r_1 r_2 (r_1 + r_2) - r_g (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2). \tag{48.26}$$

und

$$\phi = \int \mathrm{d}r \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r\sqrt{(r_2 - r)(r - r_1)}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - r_g(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r})}}. \tag{48.27}$$

Ohne den letzten Faktor erhält man die Bahn in der Newtonschen Näherung als geschlossene Ellipse. Der letzte Term bewirkt eine relativistische Abweichung. Wir substituieren

and

Without the last factor one obtains in Newtonian approximation a closed ellipse. The last term causes a relativistic deviation. We substitute

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})\cos\chi. \tag{48.28}$$

Dann beschreibt das Anwachsen von χ von 0 bis 2π die Bewegung von $r = r_1$ über $r = r_2$ bei $\chi = \pi$ und zurück nach $r = r_1$. Für ϕ erhalten wir das Integral

Then the increase of χ from 0 to 2π describes the movement from $r = r_1$ to $r = r_2$ at $\chi = \pi$ and back to $r = r_1$. We obtain the integral for ϕ

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{1 - \frac{3r_g}{2}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) - \frac{r_g}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})\cos\chi}}. \tag{48.29}$$

In erster Ordnung in r_g ergibt das während eines Umlaufs ein Anwachsen des Winkels ϕ um

In first order in r_g this yields during a revolution an increase of the angle ϕ by

$$2\pi\left(1 + \frac{3r_g}{4}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})\right). \tag{48.30}$$

Der Zusatz-Term proportional zu r_g ist die Perihel-Verschiebung, die beim Merkur zuerst beobachtet wurde (neben weiteren Effekten, die zur Perihel-Verschiebung beitragen und bereits vorher bekannt waren).

The additional term proportional to r_g is the perihelion shift which was first observed for mercury (besides other effects which contribute to this shift and were known before).

48.c Ablenkung eines Lichtstrahls

Wir betrachten jetzt die Ablenkung eines Lichtstrahls, der sich der Masse bis auf den Abstand a nähert. Wir behandeln ihn als Partikel der Geschwindigkeit c. Wir eliminieren zunächst l^2 und finden aus $\dot{r}(a) = 0$

48.c Deflection of a Light Ray

Next we consider the deflection of a light-ray which approaches the mass at a distance a. We treat it as particle with velocity c. First we eliminate l^2 and obtain from $\dot{r}(a) = 0$

$$l^2 = \frac{a^3}{a - r_g}\left(\gamma^2 v^2 + \frac{c^2 r_g}{a}\right), \tag{48.31}$$

$$\dot{r}^2 = \gamma^2 v^2 \left(1 - \frac{a^3}{a - r_g}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r_g}{r^3}\right)\right) + \frac{c^2 r_g}{r} - \frac{a^3 c^2 r_g}{a(a - r_g)}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r_g}{r^3}\right). \tag{48.32}$$

Für Licht divergiert $\gamma^2 v^2$, so dass wir in

$\gamma^2 v^2$ diverges for light, so that in

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{l}{r^2 \dot{r}} \tag{48.33}$$

nur die Beiträge von l^2 und $\dot{r}^2$ proportional zu $\gamma^2 v^2$ berücksichtigen brauchen,

we have only to take into account the contributions of l^2 and $\dot{r}^2$ propoerional to $\gamma^2 v^2$,

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}ra}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - r_g \frac{r^2 + ar + a^2}{ar(a + r)}}} \tag{48.34}$$

übrig bleibt. Mit der Substitution $r = a/\cos\chi$ folgt

remains. One obtains with the substitution $r = a/\cos\chi$

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}(\cos\chi + \frac{1}{1+\cos\chi})}}. \tag{48.35}$$

Entwickeln wir hier nach r_g/a, so folgt für den gesamten Winkel

If we expand now in r_g/a, then one finds for the total angle

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\chi \left(1 + \frac{r_g}{2a}(\cos\chi + \frac{1}{1+\cos\chi})\right) = \pi + \frac{2r_g}{a}. \tag{48.36}$$

Der Lichtstrahl wird also um den Winkel $2r_g/a$ zum Zentrum gekrümmt.

Thus the light-ray is curved to the center by an angle $2r_g/a$.

Betrachten wir die entsprechende klassische Rechnung, so lassen wir den Strahl in hinreichender Näherung auf der Bahn $(x = ct, a + \delta y)$ laufen, wobei

If we consider the corresponding classical calculation then we have the ray moving in sufficiently precise approximation along the orbit $(x = ct, a + \delta y)$ where

$$\delta\ddot{y} = -\frac{k_N m a}{(c^2t^2 + a^2)^{3/2}} \tag{48.37}$$

und damit

and thus

$$\delta\dot{y} = -\frac{k_N m t}{a(c^2t^2 + a^2)^{1/2}} \tag{48.38}$$

Daraus folgt eine Winkeländerung $2k_N m/(ac^2) = r_g/a$, also nur der halbe Wert des relativistischen.

This yields a change in angle $2k_N m/(ac^2) = r_g/a$, which is half the value of the relativistic one.

48.d Bahnen nahe des Zentrums

48.d Orbits close to the center

Wir wollen nun die Bewegung von Teilchen untersuchen, die dem Schwarzschild-Radius nahe kommen, oder sich auch innerhalb dieses Radius bewegen. Hierzu führe ich die inversen Radien

We will now investigate the movement of particles which come close to the Schwarzschild radius or which move inside this radius. For this purpose I introduce the inverse radii

$$\rho = \frac{r_g}{r}, \quad \rho_i = \frac{r_g}{r_i} \tag{48.39}$$

ein, wobei ich neben ρ_1 und ρ_2 einen dritten inversen Radius ρ_0 einführe, der

where I introduce besides ρ_1 and ρ_2 a third inverse radius which obeys

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = 1 \tag{48.40}$$

genügt. Dann werden die Konstanten der Bewegung durch

Then the constants of motion can be expressed by

$$\frac{c^2 r_g^2}{l^2} = \rho_0\rho_1 + \rho_0\rho_2 + \rho_1\rho_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \rho_0^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2\right), \tag{48.41}$$

$$-\frac{c^2}{\gamma^2 v^2} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \tag{48.42}$$

gegeben. Man beachte, dass das Vorzeichen von $\gamma^2 v^2$ beliebig sein darf, während $l^2 \geq 0$ sein muss, damit $\dot{\phi}$ reell ist.

. Observe that the sign of $\gamma^2 v^2$ may be arbitrary, but there must be $l^2 \geq 0$, so that $\dot{\phi}$ is real.

Es folgt

We obtain

$$r_g^2 \dot{r}^2 = l^2 P(\rho), \quad P(\rho) = (\rho - \rho_0)(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2). \tag{48.43}$$

Die Gleichung für die Bahnkurve nimmt dann die Form

Then the equation for the orbit reads

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{P(\rho)}} \tag{48.44}$$

an. Dies führt im Allgemeinen auf ein elliptisches Integral. Falls alle drei ρ_i reell sind, ordnen wir

. In general this yields an elliptic integral. If all three ρ_i are real, then we arrange

$$\rho_0 \geq \rho_1 \geq \rho_2. \tag{48.45}$$

Die Masse kann sich nur in einem Bereich bewegen, in dem P positiv ist. Also muss entweder

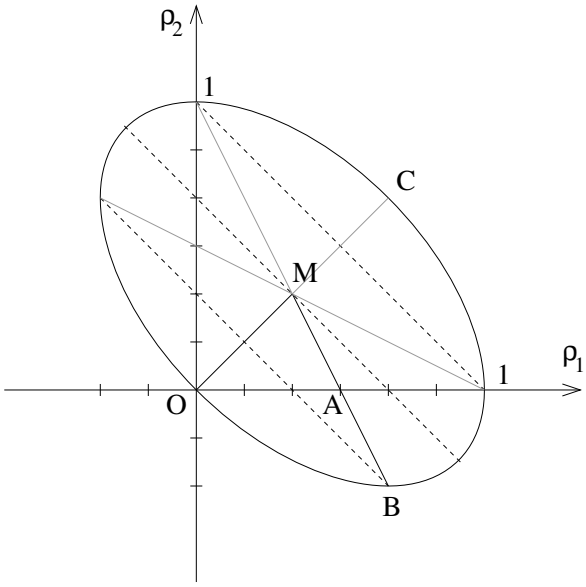
The mass can only move in the region where P is positive. Thus either

$$\text{a) } \rho_1 \geq \rho \geq \rho_2 \quad \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{or}\end{matrix} \quad \text{b) } \rho \geq \rho_0 \tag{48.46}$$

gelten. Falls nur ein ρ_i reell ist, bezeichnen wir es mit ρ_0. Dann gilt ebenfalls die Bedingung b), da dann wegen $\rho_2 = \rho_1^*$ das Produkt $(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)$ stets positiv ist.

has to hold. If only one ρ_i is real then we denote it by ρ_0. Then again condition b) holds, since the product $(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)$ is always positive due to $\rho_2 = \rho_1^*$

Der Fall dreier reeller ρ_i. Wir zeigen den möglichen Parameterraum von ρ_1 und ρ_2 in der Figur. Der Bereich mit positivem l^2 liegt in der Ellipse. Auf dem Ellipsenumfang ist der Limes, in dem das Partikel Lichtgeschwindigkeit hat. Der Bereich $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \rho_2$ wird durch OMB abgegrenzt. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind $O(0,0)$, $A(1/2,0)$, $B(2/3,-1/3)$, $C(2/3,2/3)$, $M(1/3,1/3)$.



The case of three real ρ_i. In the figure we show the possible space of parameters ρ_1 and ρ_2. The region of positive l^2 lies inside the ellipse. At the circumference of the ellipse is the limit, in which the particle has velocity of light. The region $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \rho_2$ is limited by OMB. The coordinates of the points are $O(0,0)$, $A(1/2,0)$, $B(2/3,-1/3)$, $C(2/3,2/3)$, $M(1/3,1/3)$.

Die sechs Sektoren der Ellipse geben die Permutationen der ρ_i wieder.

The six sectors of the ellipse reproduce the six permutations of the ρ_i.

α) Gebundene Bahnen erhalten wir, wenn ρ_2 positiv ist. Dies gilt in dem Bereich des Dreiecks OAM. Den geringst möglichen Abstand zum Zentrum erhält man bei A, das heißt für $\rho_1 < 1/2$ oder $r_1 > 2r_g$. Kreisbahnen hat man auf der Strecke OM, das heißt für $\rho_2 = \rho_1 \leq 1/3$ oder $r_1 = r_2 \geq 3r_g$. Auch auf der Strecke MA hat man Kreisbahnen ($2r_g \leq r \leq 3r_g$). Dort ist $\rho_0 = \rho_1$. Diese sind jedoch instabil. Eine kleine Störung genügt und die Masse stürzt entweder ins Zentrum oder bewegt sich bis $r = r_g/\rho_2$ nach außen.

α) Bound orbits are obtained, if ρ_2 is positive. This holds in the region of the triangle OAM. The smallest possible distance to the center is obtained at A that is for $\rho_1 < 1/2$ or $r_1 > 2r_g$. Circular orbits are along the line OM, that is for $\rho_2 = \rho_1 \leq 1/3$ or $r_1 = r_2 \geq 3r_g$. There are also circular orbits along line MA ($2r_g \leq r \leq 3r_g$). They are, however, unstable. A small perturbation is sufficient and the mass either falls into the center or moves out until $r = r_g/\rho_2$.

β) Offene Bahnen erhält man im Parameter-Bereich OAB. Der geringst mögliche Abstand, bei dem eine Masse dem Absturz ins Zentrum entgehen kann, liegt dann bei B, das heißt bei $\rho_1 < 2/3$ oder $r_1 > 3r_g/2$. Längs der Linie AB hat man wieder instabile Kreisbahnen ($3r_g/2 \leq r \leq 2r_g$). Unter Störung stürzt die Masse entweder zum Zentrum oder ins Unendliche.

γ) Neben diesen Bahnen hat man in diesem Bereich des Diagramms auch die Bahnen für $\rho > \rho_0$. Linien konstanten ρ_0s sind als gestrichelte Linien eingezeichnet. Die Linie durch M hat $\rho_0 = 1/3$, die oberhalb $\rho_0 = 0$, bei C hat man $\rho_0 = -1/3$. Die Linie unterhalb M ist die für $\rho_0 = 2/3$ und bei O hat man schließlich $\rho_0 = 1$. Für diese Bahnen ist also $1/3 \leq \rho_0 \leq 1$ oder $r_g \leq r_0 \leq 3r_g$. Sie laufen von $r = 0$ nach $r = r_0$ und kehren dann nach $r = 0$ zurück.

Der Fall zweier komplexer ρ_i. In diesem Fall sind ρ_1 und ρ_2 komplex,

β) Open orbits are within the paramater region OAB. The smallest possible distance at which a mass can escape the collaps into the center is at B, that is at $\rho_1 < 2/3$ or $r_1 > 3r_g/2$. Along the line there are again unstable circular orbits ($3r_g/2 \leq r \leq 2r_g$). If perturbed the mass falls into the center or escapes to infinity.

γ) Besides these orbits one has in this region of the diagram also orbits for $\rho > \rho_0$. Lines of constant ρ_0 are drawn as dashed lines. The line through M has $\rho_0 = 1/3$, the one above $\rho_0 = 0$, at C one has $\rho_0 = -1/3$. The line below M is for $\rho_0 = 2/3$ and at O one has finally $\rho_0 = 1$. Thus for these orbits one has $1/3 \leq \rho_0 \leq 1$ or $r_g \leq r_0 \leq 3r_g$. They run from $r = 0$ to $r = r_0$ and return then to $r = 0$.

The case of two complex ρ_i. In this case ρ_1 and ρ_2 are complex,

$$\rho_{1,2} = \frac{1-\rho_0}{2} \pm \mathrm{i}\rho'. \tag{48.47}$$

Um ein positives l^2 zu erhalten, muss

In order to obtain a positive l^2 the inequality

$$\frac{c^2 r_g^2}{l^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\rho_0^2 + \rho_0 + 2\rho'^2\right) \geq 0 \tag{48.48}$$

sein, also

has to hold, thus

$$\rho'^2 > \frac{3}{4}(\rho_0 - 1)(\rho_0 + \frac{1}{3}). \tag{48.49}$$

ρ_0 kann dann jeden Wert annehmen. Ist ρ_0 positiv, dann bewegt sich die Masse von $r = 0$ nach $r = r_0 = r_g/\rho_0$ und wieder zurück nach $r = 0$. Ist ρ_0 kleiner 1, so bewegt sich die Masse aus dem Schwarzschildschen Radius heraus, stürzt aber letztendlich wieder in den Ursprung zurück. Falls ρ_0 negativ ist, bewegt sich die Masse vom Ursprung ins Unendliche oder stürzt aus dem Unendlichen in den Ursprung.

ρ_0 can assume any real value. If ρ_0 is positive, then the mass moves from $r = 0$ to $r = r_0 = r_g/\rho_0$ and back to $r = 0$. If ρ_0 is less than 1, then the mass leaves the Schwarzschild radius, but finally it falls back into the origin. If ρ_0 is negative, then the mass moves from the origin to infinity or it falls from infinity to the origin.

Wir erkennen, dass im Bereich $-1/3 \leq \rho_0 \leq 1$ die Ungleichung (48.49) bereits für $\rho' = 0$ erfüllt ist. Im Bereich $1/3 \leq \rho_0 \leq 1$ entspricht dies den unter γ) diskutierten Bahnen. Falls jedoch $-1/3 > \rho_0 > +1/3$, dann ist $\rho' \neq 0$ notwendig, da sonst die Masse an $\rho = \frac{1-\rho_0}{2}$ nicht vorbeikommt.

We observe that the inequality (48.49) is already fulfilled for $\rho' = 0$ in the region $-1/3 \leq \rho_0 \leq 1$. In the region $1/3 \leq \rho_0 \leq 1$ this corresponds to the orbits already discussed under γ). If however $-1/3 > \rho_0 > +1/3$, then $\rho' \neq 0$ is necessary, since otherwise the mass cannot pass at $\rho = \frac{1-\rho_0}{2}$.

Wir wollen nun noch den Einfangquerschnitt eines Teilchens durch die Masse bestimmen. Hierzu müssen wir für gegebene Geschwindigkeit v das maximal mögliche l bestimmen, das noch zu einem Einfang führt. Tatsächlich findet sich dieses längs der Linie AB. Fügen wir zu $\rho_{1,2}$ einen Imaginärteil ρ' hinzu, so folgt

We wish to determine the capture cross-section of a particle by the mass. Thus for given velocity v we have to determine the maximal l which leads to capturing. This is found along the line AB. If we add an imaginary part ρ' to $\rho_{1,2}$ then we obtain

$$-\frac{c^2}{\gamma^2 v^2} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\rho_0) + \mathrm{i}\rho'} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\rho_0) - \mathrm{i}\rho'} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1-\rho_0}{\frac{1}{4}(1-\rho_0)^2 + \rho'^2}. \tag{48.50}$$

Wir schreiben die Gleichung in der Form

We rewrite the equation

$$-\frac{1}{\rho_0} = \frac{1-\rho_0}{\frac{1}{4}(1-\rho_0)^2 + \rho'^2} + \frac{1}{\beta^2\gamma^2}. \tag{48.51}$$

Damit das Teilchen vom Unendlichen in den Ursprung gelangen kann, muss ρ_0 negativ sein und $\rho' \neq 0$. Daraus folgen die Grenzen für $1/\rho_0$

In order that the mass can reach the origin from infinity ρ_0 has to be negative and $\rho' \neq 0$. From this condition we obtain the limits for $1/\rho_0$

$$\frac{1}{\beta^2\gamma^2} \leq -\frac{1}{\rho_0} < \frac{1}{\beta^2\gamma^2} + \frac{4}{1-\rho_0}. \tag{48.52}$$

Aus den Gleichungen (48.41) und (48.42) folgt

We obtain from the equations (48.41) and (48.42)

$$\frac{c^2 r_g^2}{l^2} = \rho_0\rho_1\rho_2\left(-\frac{c^2}{\gamma^2 v^2}\right) = \rho_0\left(\frac{1}{4}(1-\rho_0)^2 + \rho'^2\right)\left(-\frac{c^2}{\gamma^2 v^2}\right). \tag{48.53}$$

Dieser Ausdruck muss möglichst klein werden, damit l^2 maximal wird. Dies ist der Fall für möglichst kleines $-\rho_0$ und $\rho' \to 0$. Damit müssen wir in Gleichung(48.52) die Grenze

This expression has to be as small as possible so that l^2 becomes maximal. This is the case for a $-\rho_0$ as small as possible and $\rho' \to 0$. Thus in eq. (48.52) we have to use

$$-\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\beta^2\gamma^2} + \frac{4}{1-\rho_0} \tag{48.54}$$

verwenden. Damit folgt dann

. Then we obtain

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\left(1 + 3\beta^2\gamma^2 - \sqrt{(1+\beta^2\gamma^2)(1+9\beta^2\gamma^2)}\right) = \frac{-2\beta^2\gamma^2}{1 + 3\beta^2\gamma^2 + \sqrt{(1+\beta^2\gamma^2)(1+9\beta^2\gamma^2)}} \tag{48.55}$$

und

and

$$\frac{l^2}{c^2 r_g^2} = \frac{-1 + 18\beta^2\gamma^2 + 27\beta^4\gamma^4 + (1+9\beta^2\gamma^2)\sqrt{(1+\beta^2\gamma^2)(1+9\beta^2\gamma^2)}}{8\beta^2\gamma^2} \tag{48.56}$$

$$= \frac{8}{1 - 18\beta^2\gamma^2 - 27\beta^4\gamma^4 + (1+9\beta^2\gamma^2)\sqrt{(1+\beta^2\gamma^2)(1+9\beta^2\gamma^2)}}. \tag{48.57}$$

Der maximale Stoßparameter b ergibt sich aus $l = r^2\dot{\phi} = \beta\gamma cb$. Damit hat man dann

The maximal impact parameter b is obtained from $l = r^2\dot{\phi} = \beta\gamma cb$. Then one obtains

$$b^2 = \frac{l^2}{\beta^2\gamma^2 c^2} = \frac{l^2}{c^2 r_g^2}\frac{r_g^2}{\beta^2\gamma^2}. \tag{48.58}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ folgt $\rho_0 = -\beta^2$, $l^2/c^2 r_g^2 = 4$, $b = 2r_g c/v$. Für Licht $v = c$ findet man $b = \sqrt{27/4}r_g$.

For small velocities $v \ll c$ one obtains $\rho_0 = -\beta^2$, $l^2/c^2 r_g^2 = 4$, $b = 2r_g c/v$. One finds $b = \sqrt{27/4}r_g$ for light.

48.e Zeitablauf

Die Bahnkurven zeigten keinerlei Singularitäten außer vielleicht am Ursprung, so dass es scheint, als sei der Schwarzschild-Radius r_g nur eine charakteristische Länge für die Bewegungen. Tatsächlich erweist er sich aber bei Betrachtung des Zeitablaufs als eine Singularität.

48.e Time Flow

The orbits do not show any singularities except perhaps at the origin. Thus it seems, that the Schwarzschild radius r_g is only a characteristic length for the motion. In fact it turns out, that there is a singularity as one observes the course of motion in time.

Der Gleichung (48.21) entnehmen wir, dass auch der Ablauf als Funktion der Eigenzeit τ ohne Singularität ist (Der Punkt gibt die Ableitung nach τ an). Völlig anders ist die Situation für den Beobachter von außerhalb, der etwa das Eintauchen einer Masse in das Gebiet $r < r_g$ beobachten will. Für ihn erstreckt sich die Zeit t gemäß (48.17) immer länger

We gather from equation (48.21), that the course of the motion as a function of proper time τ is without singularity (The dot indicates the derivative with respect to τ). Completely different is the situation for the observer from outside, who wishes to observe the immersion of the mass into the region $r < r_g$. The time t extends for him according to (48.17) longer and longer

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\gamma r}{r - r_g} \tag{48.59}$$

und es dauert für ihn unendlich lange bis der hineinfallende Körper den Schwarzschild-Radius erreicht hat. Tatsächlich bewirkt die Gravitations-Rotverschiebung, dass die Abstrahlung eines solchen Körpers immer niederfrequenter erscheint bis er auf Grund der geringen Abstrahlungs-Intensität nicht mehr beobachtbar ist.

and it takes for him infinitely long until the falling mass has reached the Schwarzschild radius. The gravitational red-shift causes the radiation of the body to become of lower and lower frequency until it is no longer observable due to the small radiation intensity.

48.f Kruskal-Koordinaten

Besteht am Schwarzschild-Radius eine Singularität? Nicht wirklich. Kruskal hat an Stelle der Koordinaten r und t andere Koordinaten x und y vorgeschlagen

48.f Kruskal coordinates

Is there a singularity at the Schwarzschild radius? Not really. Kruskal has suggested new coordinates x and y instead of r and t

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)\mathrm{e}^{r/r_g} = xy, \quad \mathrm{e}^{ct/r_g} = x/y. \tag{48.60}$$

Die Umrechnung auf die neuen Koordinaten ergibt für das Wegelement

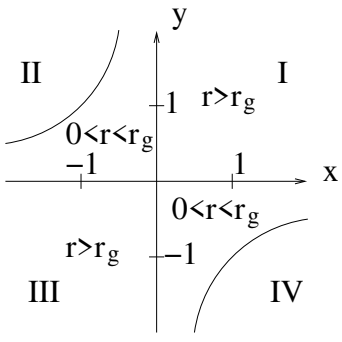
Translation into the new coordinates yields the distance element

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{4r_g^3}{r}\mathrm{e}^{-r/r_g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{48.61}$$

wobei r durch x und y auszudrücken ist.

where r has to be expressed by x and y.

Der Schwarzschild-Radius $r = r_g$ liegt bei $x = 0$ oder $y = 0$. Dort ist die Metrik nicht singulär. Der Ursprung $r = 0$ liegt jetzt bei $xy = -1$. Für gegebenes r und t hat man jetzt zwei Lösungen (x, y) und $(-x, -y)$. Dies gibt zu Spekulationen Anlass, dass hier zwei 'Welten' durch ein 'Wurmloch' miteinander verbunden sein können. Aus der Metrik folgt



The Schwarzschild radius $r = r_g$ is now at $x = 0$ and $y = 0$ located. There the metric is not singular. The origin $r = 0$ lies now at $xy = -1$. For given r and t there are two solutions (x, y) and $(-x, -y)$. This gives rise to speculations that here two 'worlds' are connected by a 'wormhole'. We obtain from the metric

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{4r_g^3}\mathrm{e}^{r/r_g}\left(r\mathrm{d}s^2 + r^3(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right). \tag{48.62}$$

Für die Weltlinien ($ds^2 > 0$) gilt stets, dass $dxdy$ negativ ist. Daher bewegen sich Körper in dieser Figur auf Kurven negativer Steigung. Der Quadrant I stellt unsere Welt außerhalb des Schwarzschild-Radius dar. Körper, die in den Schwarzschild-Radius fallen, fallen daher in den Quadranten IV. Dies ist das schwarze Loch. Umgekehrt sind Körper denkbar, die aus dem Quadranten II in den Quadranten I kommen. Man bezeichnet dieses Gebiet daher auch als weißes Loch. Die zweite Welt wird durch den Quadranten III dargestellt. Offensichtlich kann eine Weltlinie mit negativer Steigung nicht die Quadranten I und III, also die beiden Welten miteinander verbinden.
Ich lasse offen, ob so ein Bild zutreffend ist. Insbesondere kann ein schwarzes Loch durch einen Gravitationskollaps entstehen. Wo soll dann das schwarze Loch seine zweite Welt hernehmen?
Es bleibt aber zu bemerken, dass $r = 0$ eine echte Singularität darstellt. Wir können nicht sagen, was passiert, wenn ein Körper $r = 0$ erreicht, oder ob ein Körper bei $r = 0$ emittiert werden kann. Dass hier eine echte Singularität vorliegt, erkennt man daran, dass der Skalar

One has always a negative $dxdy$ for the world lines ($ds^2 > 0$). Thus the bodies move in this figure always along curves of negative slope. The quadrant I represents the world outside the Schwarzschild radius. Bodies which fall into the Schwarzschild radius, thus fall into quadrant IV. This is the black hole. On the other hand it is feasible that bodies come out of quadrant II into quadrant I. Thus the region II is called white hole, too. The second world is represented by quadrant III. Obviously a world line with negative slope cannot connect quadrants I and III, that is the two worlds.

I leave open whether such a picture is appropriate. In particular, a black hole can be generated by a gravitational collaps. Where from should this black hole take its second world?
It remains to note, that $r = 0$ is a true singularity. We cannot say what happens, when a body reaches $r = 0$, nor whether a body can be emitted at $r = 0$. That this is a real singularity becomes evident by considering the scalar

$$R_{\mu\nu}{}^{\kappa\lambda} R^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda} = 12 \left(\frac{r_g}{r^3}\right)^2 . \tag{48.63}$$

unabhängig von der Wahl der Koordinaten bei $r = 0$ divergiert.

which diverges independently of the choice of coordinates at $r = 0$.

Nachtrag zu Abschnitt 48.d Bei der Diskussion wurde übersehen, dass zwar v^2 als Geschwindigkeitsquadrat im Unendlichen negativ sein kann, dass aber γ wegen (48.17) stets reell sein muss. Daraus ergibt sich die Einschränkung, dass $-c^2/(\gamma^2 v^2)$, (48.42) entweder ≤ 0 oder ≥ 1 sein muss. Für reelle ρ_i ist dies stets erfüllt. Sind nämlich alle ρ_i positiv, so ist das Minimum des Ausdrucks 9. Ist ein ρ_i innerhalb der Ellipse, die durch $l^2 > 0$ gegeben ist negativ, so folgt aus der Beziehung

Addendum to section 48.d In the discussion it had been overlooked that indeed v^2 as velocity square at infinity may be negative, but that γ has to be real because of (48.17). From this we obtain the restriction that $-c^2/(\gamma^2 v^2)$, (48.42) has to be either ≤ 0 or ≥ 1. For real ρ_i this is always fulfilled. If all ρ_i is positive then the minimum of the expression is 9. If one of the ρ_i inside the ellipse given by $l^2 > 0$ is negative then we obtain from the relation

$$\frac{c^2 r_g^2}{l^2} = \rho_0\rho_1\rho_2 \left(-\frac{c^2}{\gamma^2 v^2}\right), \tag{48.64}$$

die man aus (48.41) und (48.42) erhält, dass $-c^2/(\gamma^2 v^2)$ negativ ist. Falls zwei ρ_i komplex sind, so zeigt obiges Argument, dass man für negatives ρ_0 auch ein negatives $-c^2/(\gamma^2 v^2)$ erhält. Wenn $0 \leq \rho_0 \leq 1$, so folgt aus

which one obtains from (48.41) and (48.42), that $-c^2/(\gamma^2 v^2)$ is negative. If two ρ_i is complex, then the argument above shows, that one obtains a negative $-c^2/(\gamma^2 v^2)$ for negative ρ_0. If $0 \leq \rho_0 \leq 1$, then we obtain from

$$-\frac{c^2}{\gamma^2 v^2} - 1 = \frac{(1-\rho_0)(\rho'^2 + \frac{1}{4}(\rho_0+1)^2)}{\rho_0(\rho'^2 + \frac{1}{4}(1-\rho_0)^2)}, \tag{48.65}$$

dass $-c^2/(\gamma^2 v^2) \geq 1$ ist. Für $\rho_0 > 1$ liegt jedoch $-c^2/(\gamma^2 v^2)$ zwischen 0 und 1, so dass man keine derartigen Lösungen erhält. Man entnimmt dies auch dem KRUSKAL Diagramm. Es gibt keine Weltlinien mit negativer Steigung, die von $r = 0$ nach $r = 0$ gehen, ohne mindestens $r = r_g$ zu erreichen.

that $-c^2/(\gamma^2 v^2) \geq 1$ holds. For $\rho_0 > 1$, however, $-c^2/(\gamma^2 v^2)$ lies between 0 and 1, so that one does not obtain such solutions. This can also be seen from the KRUSKAL diagram. There are no world lines with negative slope, which run from $r = 0$ to $r = 0$ without reaching at least $r = r_g$.

49 Energie-Impuls-Pseudo-Tensor

49.a Energie- und Impuls-Erhaltung

Wie wir in Abschnitt 45.d.β dargelegt haben, gibt es in der allgemeinen Relativitäts-Theorie keine Energie- und Impuls-Erhaltung, es sei denn wir addieren den Beitrag $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ als den Beitrag des Gravitationsfeldes zum Energie-Impuls-Tensor, was dann auf das triviale Ergebnis führt, dass der gesamten Energie-Impuls-Tensor identisch Null ist. Trotzdem geht man intuitiv davon aus, dass eine Gravitationswelle Energie mit sich führt, (die vielleicht nicht erhalten ist) und deren Größe man gerne kennen würde. Tatsächlich kann man ihr Energie und Impuls zuordnen wie auch einem isolierten System, das sich in einer asymptotisch ebenen Umgebung befindet. Man geht also davon aus, dass in weiter Entfernung die Metrik $g_{\mu\nu}$ gegen die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ geht. Die Festlegung des 'Energie-Impuls-Pseudo-Tensors' ist nicht eindeutig. Sie hängt von der Wahl der Koordinaten ab, doch kann diese im Minkowski-Limes hinreichend genau festgelegt werden. Es gibt dazu verschiedene Verfahren, deren Ergebnisse in den uns interessierenden Grenzfällen übereinstimmen, aber beim Versuch, genauere Ergebnisse zu erhalten, zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können.

Ein Verfahren besteht darin, die Lagrange-Funktion als Funktion im Minkowski-Raum zu verwenden und daraus den zugehörigen Energie-Impuls-Tensor zu berechnen. Man muss dann nur berücksichtigen, dass man ähnlich wie für Ableitungen von Vektoren auch für die Ableitungen der Metrik einen Beitrag zum symmetrischen Tensor erhält, der sich aus

$$\hat{\psi}_{\mu\nu\kappa} = 2g_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda}\frac{\partial L}{\partial(\partial^\kappa g^{\lambda\kappa})} \tag{49.1}$$

ergibt (vgl. Abschnitt 34.d). Wir werden hier einem Verfahren folgen, das sich zum Beispiel in den Büchern von Weinberg und Fliessbach findet und dem Verfahren von Landau und Lifschitz ähnelt. Man spaltet die Minkowski-Metrik ab

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{49.2}$$

Dann ist der Beitrag des Ricci-Tensors, der linear in h ist, durch

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu\partial_\kappa h^\lambda{}_\lambda + \partial_\lambda\partial_\kappa h^\lambda{}_\mu + \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda{}_\kappa - \partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\kappa}\right) \tag{49.3}$$

49 Energy-Momentum Pseudo-Tensor

49.a Energy and Momentum Conservation

In section 45.d.β we have explained, that there is no energy and momentum conservation in the general theory of relativity, unless we add the contribution $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ as the contribution of the gravitational field to the energy-momentum tensor, which yields the trivial result, that the total energy-momentum tensor vanishes identically. Neithertheless one assumes intuitively that a gravitational wave carries energy with itself (which maybe is not conserved), and whose amount one would like to know. It is indeed possible to assign energy and momentum to it. Similarly one can do this for an isolated system in an asymptotically flat environment. One assumes that at large distances the metric $g_{\mu\nu}$ approaches the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$. The specification of the 'energy-momentum pseudotensors' is not unique. It depends on the choice of the coordinates, which, however, may be sufficiently precisely defined in the Minkowski limit. There are various methods to do this, whose results agree in the limits of our interest, but yield different results, if one attempts to obtain more precise results.

One method uses the Lagrangean function as a function in Minkowski space and determines the corresponding energy-momentum tensor. Then one has to take into account, that similarly as for derivatives of vectors one has also for the derivative of the metric a contribution to the symmetric tensor, which is obtained from

(compare section 34.d). Here we will follow a different scheme which one can find for example in the books by Weinberg and Fliessbach and which has some resemblance to the method by Landau and Lifshitz. One splits the Minkowski metric off

Then the contribution of the Ricci tensor, which is linear in h, is given by

gegeben. Dabei verwenden wir jetzt die Minkowski-Metrik. Wir verwenden also die η, um die Indices hinauf und herunter zu schieben, $h^{\lambda}{}_{\lambda} = \eta^{\lambda\kappa} h_{\kappa\lambda}$. Damit erhalten wir dann die Einsteinschen Gleichungen in der Form

. We use now the Minkowski metric. Thus we use η to lift and lower the indices, $h^{\lambda}{}_{\lambda} = \eta^{\lambda\kappa} h_{\kappa\lambda}$. Then we obtain the Einstein equations in the form

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa} R^{(1)\lambda}{}_{\lambda} = \frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}(T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}), \tag{49.4}$$

wobei t alle nicht-linearen Beiträge in h enthält

where t contains all non-linear contributions in h

$$t_{\mu\kappa} = -\frac{c^4}{8\pi k_{\mathrm{N}}}\left(R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\kappa} R^{\lambda}{}_{\lambda} - R^{(1)}_{\mu\kappa} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa} R^{(1)\lambda}{}_{\lambda}\right). \tag{49.5}$$

Dieses $t_{\mu\kappa}$ betrachten wir als den Energie-Impuls-Tensor des Gravitations-Feldes und den gesamten Tensor

This $t_{\mu\kappa}$ is considered as the energy momentum tensor of the gravitational field and the total tensor

$$\Theta_{\mu\kappa} = T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa} \tag{49.6}$$

als den Energie-Impuls-Pseudo-Tensor des gesamtem Systems. Die linke Seite von (49.4) bezeichnen wir mit

as the energy-momentum pseudo-tensor of the total system. We denote the left hand-side of (49.4) by

$$G^{(1)}_{\mu\kappa} = R^{(1)}_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa} R^{(1)}, \tag{49.7}$$

so dass sich (49.4) auf

so that (49.4) is reduced to

$$G^{(1)}_{\mu\kappa} = \frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}\Theta_{\mu\kappa} \tag{49.8}$$

reduziert. Für $G^{(1)}$ erhalten wir

. We obtain for $G^{(1)}$

$$\begin{aligned}
G^{(1)}_{\mu\kappa} &= \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu\partial_\kappa h^{\lambda}{}_{\lambda} + \partial_\lambda\partial_\kappa h^{\lambda}{}_{\mu} + \partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}{}_{\kappa} - \partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\kappa} + \eta_{\mu\kappa}\partial^\lambda\partial_\lambda h^{\nu}{}_{\nu} - \eta_{\mu\kappa}\partial^\lambda\partial^\nu h_{\lambda\nu}\right) \\
&= \partial^\lambda Q_{\lambda\kappa\mu}, \qquad (49.9) \\
Q_{\lambda\kappa\mu} &= \frac{1}{2}\left(-\eta_{\mu\kappa}\partial^\nu h_{\nu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\kappa} + \eta_{\mu\lambda}\partial^\nu h_{\nu\kappa} + \partial_\kappa h_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\partial_\kappa h^{\rho}{}_{\rho} + \eta_{\mu\kappa}\partial_\lambda h^{\rho}{}_{\rho}\right) \\
&= \partial^\nu \Phi_{\mu\nu\kappa\lambda}, \qquad (49.10) \\
\Phi_{\mu\nu\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\left(-\eta_{\mu\kappa} h_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} h_{\mu\kappa} + \eta_{\mu\lambda} h_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\kappa} h_{\mu\lambda} + (\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}) h^{\rho}{}_{\rho}\right). \qquad (49.11)
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass Φ den gleichen Symmetrie-Beziehungen genügt wie R,

We note that Φ obeys the same symmetry relations as R,

$$\Phi_{\mu\nu\kappa\lambda} = -\Phi_{\nu\mu\kappa\lambda} = -\Phi_{\mu\nu\lambda\kappa} = \Phi_{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{49.12}$$

$$\Phi_{\mu\nu\kappa\lambda} + \Phi_{\mu\kappa\lambda\nu} + \Phi_{\mu\lambda\nu\kappa} = 0. \tag{49.13}$$

Landau und Lifschitz gehen aus von

Landau and Lifshitz start from

$$\Phi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{-g}{2}(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}), \tag{49.14}$$

was nach Entwicklung von $g^{\cdot\cdot} = \eta^{\cdot\cdot} - h^{\cdot\cdot}$ und Linearisierung in h auf obiges Φ führt.

which after linearization of $g^{\cdot\cdot} = \eta^{\cdot\cdot} - h^{\cdot\cdot}$ in h yields the Φ above.

Wegen der Antisymmetrie von Φ ist Q in seinen beiden vorderen Indices antisymmetrisch. Damit folgt sofort, das die Divergenz der linken Seite von Gl. (49.4) verschwindet. Damit gilt das entsprechende für die rechte Seite

Q is antisymmetric in its first two indices due to the antisymmetry of Φ. Thus it follows immediately that the divergence of the left hand-side of eq. (49.4) vanishes. The corresponding statement holds for the right hand-side

$$\partial^\kappa \Theta_{\mu\kappa} = 0. \tag{49.15}$$

Auf Grund dieser Divergenzfreiheit gilt bei Integration über ein endliches System des Volumens V

Since Θ is divergence free, the integral over a finite system of volume V yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x\Theta_{\mu 0} = -c\int_{\partial V}\mathrm{d}f^\alpha\Theta_{\mu\alpha}, \tag{49.16}$$

wobei

where

$$\mathrm{d}f^\alpha = -n^\alpha \mathrm{d}f \tag{49.17}$$

mit dem Flächenelement $\mathrm{d}f$ und dem nach außen gerichteten Normalenvektor n. Das Minus-Zeichen erklärt sich wie folgt. Wir haben für ein beliebiges Vektorfeld j

with the surface element $\mathrm{d}f$ and the normal vector n pointing outward. The minus sign is explained as follows: We have for an arbitrary vector-field j

$$\int \mathrm{d}^3x\partial_\alpha j^\alpha = \int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 j^3 + ... = \int \mathrm{d}f n^3 j^3 + ... = -\int \mathrm{d}f n^3 j_3 ... \tag{49.18}$$

Daher können wir

Therefore we may interpret

$$P_\mu = \frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3x\Theta_{\mu 0} \tag{49.19}$$

als den Energie-Impuls-Vektor des Systems interpretieren, während die rechte Seite der Gleichung (49.16) den Energie- bzw. Impulsstrom durch die Oberfläche beschreibt. Ähnlich kann man auch den antisymmetrischen Tensor

as the energy-momentum vector of the system, whereas the right-hand side of equation (49.16) describes the energy and momentum current through the surface. Similarly we may introduce the antisymmetric tensor

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3x(x_\mu\Theta_{\nu 0} - x_\nu\Theta_{\mu 0}) \tag{49.20}$$

einführen, für den ebenfalls ein Erhaltungssatz auf Grund der Divergenzfreiheit und Symmetrie von Θ gilt

for which we also have a conservation law due to the vanishing divergence and symmetry of Θ

$$\frac{\mathrm{d}M_{\mu\nu}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\partial V}\mathrm{d}f^\alpha(x_\mu\Theta_{\nu\alpha} - x_\nu\Theta_{\mu\alpha}). \tag{49.21}$$

Die räumlichen Komponenten $M_{\alpha\beta}$ stellen die Komponenten des Drehimpulses dar, die Komponenten $M_{0\alpha}$ stellen den Zusammenhang zwischen Schwerpunkts-Bewegung und Impuls und Energie dar (vgl. Abschnitt 28.b.γ)

The spacial components $M_{\alpha\beta}$ are the components of angular momentum, whereas the components $M_{0\alpha}$ yield the connection between the motion of the center of gravity and momentum and energy,

$$M_{0\alpha} = ctP_\alpha - \frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3x\, x_\alpha\epsilon(x), \tag{49.22}$$

wobei $\epsilon(x)$ die Energiedichte ist.

where $\epsilon(x)$ is the energy density.

Den Vierer-Impuls können wir als Oberflächenintegral darstellen

The four momentum can be represented by a surface integral

$$P_\mu = \frac{c^3}{8\pi k_\mathrm{N}}\int_V \mathrm{d}^3x\partial^\lambda Q_{\lambda 0\mu} = \frac{c^3}{8\pi k_\mathrm{N}}\int_{\partial V}\mathrm{d}f^\alpha Q_{\alpha 0\mu} \tag{49.23}$$

Der Term mit $\lambda = 0$ fällt weg, da $Q_{00\mu} = 0$ wegen der Antisymmetrie von Q in seinen beiden vorderen Indizes. Den Tensor $M_{\mu\nu}$ können wir ebenfalls durch ein Oberflächen-Integral darstellen

The Term with $\lambda = 0$ cancels, since $Q_{00\mu} = 0$ due to the antisymmetry of Q in its first two indices. The tensor $M_{\mu\nu}$ can also be represented by a surface integral

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= \frac{c^3}{8\pi k_\mathrm{N}}\int_V \mathrm{d}^3x(x_\mu\partial^\lambda Q_{\lambda 0\nu} - x_\nu\partial^\lambda Q_{\lambda 0\mu}) \\ &= \frac{c^3}{8\pi k_\mathrm{N}}\int_V \mathrm{d}^3x\partial^\lambda(x_\mu Q_{\lambda 0\nu} - x_\nu Q_{\lambda 0\mu}) - \frac{c^3}{8\pi k_\mathrm{N}}\int_V \mathrm{d}^3x((\partial^\lambda x_\mu)Q_{\lambda 0\nu} - (\partial^\lambda x_\nu)Q_{\lambda 0\mu}). \end{aligned} \tag{49.24}$$

Das erste Integral lässt sich wieder als Oberflächen-Integral ausdrücken, das zweite formen wir weiter um

The first integral can again be expressed as a surface integral, the second will be transformed

$$-\int_V \mathrm{d}^3x((\partial^\lambda x_\mu)Q_{\lambda 0\nu} - (\partial^\lambda x_\nu)Q_{\lambda 0\mu}) = -\int_V \mathrm{d}^3x(Q_{\mu 0\nu} - Q_{\nu 0\mu}) = -\int_V \mathrm{d}^3x\partial^\lambda(\Phi_{\nu\lambda 0\mu} - \Phi_{\mu\lambda 0\nu}). \tag{49.25}$$

Mittels der Symmetrie-Beziehungen (49.12) und (49.13) formen wir um

By means of the symmetry relations (49.12) and (49.13) we obtain

$$\Phi_{\nu\lambda 0\mu} - \Phi_{\mu\lambda 0\nu} = \Phi_{0\mu\nu\lambda} + \Phi_{0\nu\lambda\mu} = -\Phi_{0\lambda\mu\nu}. \tag{49.26}$$

Auch hier fällt der Term mit $\lambda = 0$ weg, da $\Phi_{00\mu\nu} = 0$ wegen der Antisymmetrie von Φ in seinen beiden vorderen Indizes. Damit erhalten wir schließlich die Darstellung von M durch das Oberflächen-Integral

Here, too, the term with $\lambda = 0$ disappears, since $\Phi_{00\mu\nu} = 0$ because of the antisymmetry of Φ in its first two indices. Thus we obtain finally the representation of M by means of the surface integral

$$M_{\mu\nu} = \frac{c^3}{8\pi k_\mathrm{N}} \int_{\partial V} \mathrm{d}f^\alpha (x_\mu Q_{\alpha 0\nu} - x_\nu Q_{\alpha 0\mu} + \Phi_{0\alpha\mu\nu}). \tag{49.27}$$

Im Falle des $M_{0\beta}$ haben wir natürlich $P_\beta t$ direkt, so dass für den Schwerpunkt X_β der Energie

In the case of $M_{0\beta}$ we have $P_\beta t$ directly, so that we obtain for the center of gravity X_β of the energy

$$EX_\beta = cP_0X_\beta = \frac{c^4}{8\pi k_\mathrm{N}} \int_{\partial V} \mathrm{d}f^\alpha (x_\beta Q_{\alpha 00} - \Phi_{0\alpha 0\beta}) \tag{49.28}$$

folgt.

.

49.b Energie, Impuls, Drehimpuls eines isolierten Systems

Wir betrachten nun ein statisches Gravitationsfeld, von dessen Quellen wir weit entfernt sind. Wir stellen fest, dass sich die zur Berechnung der Komponenten von P und M notwendigen Q und Φ vereinfachen zu

49.b Energy, Momentum, Angular Momentum of an Isolated System

Next we consider a static gravitational field, assuming that we are far away from its sources. We realize that the Q and Φ necessary to calculate the components of P and M simplify

$$Q_{\alpha 00} = \frac{1}{2}\left(-\partial^\gamma h_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha h_{00} + \partial_\alpha h^\rho{}_\rho\right), \tag{49.29}$$

$$Q_{\alpha 0\beta} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\alpha h_{0\beta} + \eta_{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\gamma 0}\right), \tag{49.30}$$

$$\Phi_{0\alpha 0\beta} = \frac{1}{2}\left(-h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}h_{00} + \eta_{\alpha\beta}h^\rho{}_\rho\right), \tag{49.31}$$

$$\Phi_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\eta_{\alpha\gamma}h_{0\beta} + \eta_{\alpha\beta}h_{0\gamma}\right). \tag{49.32}$$

Nützlich sind im Folgenden die Beziehungen

The following relations will be of use

$$\partial_\alpha \frac{1}{r} = \frac{n_\alpha}{r^2}, \tag{49.33}$$

$$\partial_\alpha\partial_\beta \frac{1}{r} = \frac{\eta_{\alpha\beta} + 3n_\alpha n_\beta}{r^3}, \tag{49.34}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega n^\alpha n^\beta = -\frac{4\pi}{3}\eta^{\alpha\beta}. \tag{49.35}$$

Man erhält die letzte Gleichung, wenn man berücksichtigt, dass das Integral ein Tensor sein muss. Hierfür kommt nur $\eta^{\alpha\beta}$ in Frage. Den Vorfaktor erhält man aus der Bedingung

One obtains the last equation if one considers that the integral has to be a tensor. Only $\eta^{\alpha\beta}$ comes into consideration. The prefactor is obtained by the condition

$$\int \mathrm{d}\Omega n^\alpha n_\alpha = \int \mathrm{d}\Omega(-1) = -4\pi. \tag{49.36}$$

Führender Beitrag Der führende Beitrag von h fällt für großen Abstand wie r^{-1} ab. Wir kennen ihn aus der SCHWARZSCHILD-Metrik. Er lautet

Leading Contribution The leading contribution of h falls of like r^{-1} at large distances. We know it from the SCHWARZSCHILD metric. It reads

$$h_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{0\alpha} = 0, \quad h^{\mathrm{S}}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta. \tag{49.37}$$

Alternativ können wir auch die Beiträge aus der Näherung für schwache Felder verwenden

Alternatively we may also use the contributions from the approximation for weak fields

$$h_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{0\alpha} = 0, \quad h^{\mathrm{w}}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{r_g}{r}. \tag{49.38}$$

In beiden Fällen erhalten wir

We obtain in both cases

$$\Phi^{\mathrm{S}}_{0\alpha0\beta} = (\eta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta) \frac{r_g}{2r}, \quad \Phi^{\mathrm{w}}_{0\alpha0\beta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{r_g}{r}, \qquad \Phi_{0\alpha\beta\gamma} = 0, \tag{49.39}$$

$$Q_{\alpha00} = n_\alpha \frac{r_g}{r^2}, \qquad Q_{\alpha0\beta} = 0. \tag{49.40}$$

Daraus folgt mit beiden Metriken

From this we obtain with both metrics

$$P_\beta = 0, \quad P_0 = -\frac{c^3}{8\pi k_{\mathrm{N}}} r_g \int \mathrm{d}\Omega n^\alpha n_\alpha = \frac{c^3 r_g}{2k_{\mathrm{N}}} = mc = \frac{E}{c} \tag{49.41}$$

wie erwartet. Auch der Schwerpunkt X_β ergibt in beiden Fällen 0.

as expected. Also the center of gravity X_β yields 0 in both cases.

Selbstenergie des Feldes In Ordnung $h \propto r^{-2}$ kennen wir aus der SCHWARZSCHILD-Metrik den Beitrag

Self-energy of the Field We know from the SCHWARZSCHILD metric the contribution of order $h \propto r^{-2}$

$$h_{00} = 0, \quad h_{0\alpha} = 0, \quad h_{\alpha\beta} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta. \tag{49.42}$$

Er ergibt

It yields

$$\Phi_{0\alpha0\beta} = \frac{r_g^2}{2r^2} \left(\eta_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta\right), \qquad \Phi_{0\alpha\beta\gamma} = 0, \tag{49.43}$$

$$Q_{\alpha00} = \frac{r_g^2}{r^3} n_\alpha, \qquad Q_{\alpha0\beta} = 0. \tag{49.44}$$

Daraus folgt

Hence we obtain

$$P_\beta = 0, \quad P_0 = \frac{c^3 r_g^2}{2k_{\mathrm{N}} r}. \tag{49.45}$$

Diese Energie verschwindet im Limes $r \to \infty$. Das Negative davon ist im statischen Gravitationsfeld außerhalb von r gespeichert. Daher ist auch die Massenbeziehung $r_g = \frac{2k_{\mathrm{N}} m}{c^2}$ nur näherungsweise gültig. Die tatsächliche (konstitutive) Masse ist größer. Zu ihr ist die Gravitationsenergie, die negativ ist, dividiert durch c^2 hinzu zu addieren.

This energy vanishes in the limit $r \to \infty$. The negative of it is stored in the static gravitational field outside the radius r. Thus the mass relation $r_g = \frac{2k_{\mathrm{N}} m}{c^2}$ is only approximately correct. The real (constitutive) mass is larger. One has to add the gravitational energy, which is negative, divided by c^2.

Schwerpunkts-Verschiebung Ist die Masse nicht im Ursprung, sondern bei $\mathbf{r} = \mathbf{a}$, so ergibt

Displacement of center of Mass If the mass is not at the origin but at $\mathbf{r} = \mathbf{a}$, then

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{1}{r} - a^\gamma \partial_\gamma \frac{1}{r} \tag{49.46}$$

Beiträge yields contributions

$$h_{00} = r_g a^\gamma \partial_\gamma \frac{1}{r}, \quad h_{0\alpha} = 0, \quad h_{\alpha\beta} = -r_g \eta_{\alpha\beta} a^\gamma \partial_\gamma \frac{1}{r} \tag{49.47}$$

zu h. Hieraus folgen die Beiträge to h. Then we obtain the contributions

$$\Phi_{0\alpha 0\beta} = -r_g \eta_{\alpha\beta} a^\gamma \partial_\gamma \frac{1}{r}, \qquad \Phi_{0\alpha\beta\gamma} = 0, \tag{49.48}$$

$$Q_{\alpha 00} = -r_g a^\gamma \partial_\alpha \partial_\gamma \frac{1}{r}, \qquad Q_{\alpha 0\beta} = 0. \tag{49.49}$$

Daraus folgt dann Thus we obtain

$$EX_\beta = \frac{c^4}{8\pi k_\mathrm{N}} r_g a_\beta = E a_\beta \tag{49.50}$$

wie zu erwarten. as expected.

Drehimpuls Von Interesse sind auch Beiträge der Form

Angular Momentum Contributions of the form are of interest, too

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} \partial^\beta \frac{1}{r}. \tag{49.51}$$

Verlangen wir die Eichbedingung aus Abschnitt 46 If we require the gauge condition of section 46

$$b_\lambda(x) = \partial^\mu h_{\mu\lambda}(x) - \frac{1}{2} \partial_\lambda h^\mu{}_\mu(x) = 0, \tag{49.52}$$

so folgt then we obtain

$$\lambda_{\alpha\beta} \partial^\alpha \partial^\beta \frac{1}{r} = 0, \tag{49.53}$$

was auf die Lösung which yields the solution

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda \eta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} \tag{49.54}$$

mit $a_{\beta\alpha} = -a_{\alpha\beta}$ führt. Den λ-Beitrag kann man mit der Verschiebung with $a_{\beta\alpha} = -a_{\alpha\beta}$. The λ contribution can be transformed away with the displacement

$$\xi^0 = \frac{\lambda}{r}, \quad \xi^\alpha = 0 \tag{49.55}$$

wegtransformieren. Dagegen ergibt der Beitrag mit dem antisymmetrischen a . The contribution with the antisymmetric a yields, however,

$$\Phi_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\eta_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} \partial^\delta \frac{1}{r} + \eta_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} \partial^\delta \frac{1}{r}\right), \qquad \Phi_{0\alpha 0\beta} = 0, \tag{49.56}$$

$$Q_{\alpha 0\beta} = \frac{1}{2}\left(-a_{\beta\delta} \partial_\alpha \partial^\delta \frac{1}{r} + \eta_{\alpha\beta} \underbrace{a_{\delta\epsilon} \partial^\delta \partial^\epsilon \frac{1}{r}}_{0}\right) \qquad Q_{\alpha 00} = 0. \tag{49.57}$$

Nach einiger Rechnung finden wir, dass jeder Term in (49.27) einen Beitrag $\frac{4\pi}{3} a_{\beta\gamma}$ zum Integral für $M_{\beta\gamma}$ beiträgt. Damit erhalten wir den Drehimpuls After some calculation we find, that each term in (49.27) yields $\frac{4\pi}{3} a_{\beta\gamma}$ to the integral to $M_{\beta\gamma}$. Thus we obtain the angular momentum

$$M_{\beta\gamma} = \frac{c^3}{2k_\mathrm{N}} a_{\beta\gamma}. \tag{49.58}$$

Wir erkennen hieraus, dass die Rotation einer Masse zur Metrik außerhalb des Körpers beiträgt.

We recognise that the rotation of a mass contributes to the metric outside the body.

49.c Energie und Impuls von Gravitations-Wellen

49.c Energy and Momentum of Gravitational Waves

Wir können t auf der rechten Seite von Gleichung (49.5) bis zur zweiten Ordnung in h entwickeln. Wir erhalten

We can expand t on the right-hand side of eq. (49.5) to the second order in h. We obtain

$$t_{\mu\kappa} = -\frac{c^4}{8\pi k_\mathrm{N}}\left(-\frac{1}{2}h_{\mu\kappa}R^{(1)\lambda}{}_{\lambda} + R^{(2)}{}_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa}R^{(2)\lambda}{}_{\lambda}\right) \tag{49.59}$$

mit

with

$$\begin{aligned} R^{(2)}{}_{\mu\kappa} &= \frac{1}{2}h^{\lambda\nu}\left(\partial_\kappa\partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\kappa\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\lambda\kappa} + \partial_\nu\partial_\lambda h_{\mu\kappa}\right) \\ &- \frac{1}{4}\left(2\partial_\gamma h^\nu{}_\sigma - \partial_\sigma h^\nu{}_\nu\right)\left(\partial_\kappa h^\sigma{}_\nu + \partial_\mu h^\sigma{}_\kappa - \partial^\sigma h_{\mu\kappa}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(\partial_\lambda h_{\sigma\kappa} + \partial_\kappa h_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma h_{\lambda\kappa}\right)\left(\partial^\lambda h^\sigma{}_\mu + \partial_\mu h^{\sigma\lambda} - \partial^\sigma h^\lambda{}_\mu\right). \end{aligned} \tag{49.60}$$

Wir werten diesen Ausdruck für den Fall eines Wellenzugs aus, der sich in x^3-Richtung ausbreitet. Wir nehmen also an, dass es nur Komponenten $h_{\alpha\beta}$ mit $\alpha,\beta = 1,2$ gibt, und dass diese Komponenten nur von x^μ mit $\mu = 0,3$ abhängen. Im Folgenden dieses Abschnitts nehmen wir an $\alpha,\beta,\gamma \in 1,2$ und $\mu,\nu,\kappa \in 0,3$. Es heben sich dann viele Beiträge in (49.60) weg und wir erhalten

We evaluate this expression for the case of a wave-packet, which propagates in x^3 direction. Thus we assume, that it has only components $h_{\alpha\beta}$ with $\alpha,\beta = 1,2$, and that these components depend only on x^μ with $\mu = 0,3$. In the following of this section we assume that $\alpha,\beta,\gamma \in 1,2$ and $\mu,\nu,\kappa \in 0,3$. Then many contributions in (49.60) vanish and we obtain

$$R^{(2)}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\gamma\beta}\partial^\mu h^\gamma{}_\alpha, \tag{49.61}$$

$$R^{(2)}{}_{\alpha\mu} = 0, \tag{49.62}$$

$$R^{(2)}{}_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\kappa h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\partial_\kappa h_{\alpha\beta}\partial_\mu h^{\alpha\beta}. \tag{49.63}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $h^\alpha{}_\alpha = 0$. Die Spur $R^{(2)}$ ergibt sich dann zu

Here we have used, that $h^\alpha{}_\alpha = 0$. The trace $R^{(2)}$ yields

$$R^{(2)} = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial_\mu h^{\alpha\beta} + \frac{3}{4}\partial^\mu h^{\alpha\beta}\partial_\mu h_{\alpha\beta}. \tag{49.64}$$

Für ein Wellenpaket, das in positiver x^3-Richtung läuft, $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x^3 - x^0)$, beobachtet man zunächst, dass

One observes for a wave-packet, which travels in positive x^3 direction $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x^3 - x^0)$, that

$$\partial^\mu\partial_\mu h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^3\partial x^3} = h'' - h'' = 0, \tag{49.65}$$

$$\partial^\mu h\partial_\mu h = (-h')(-h') + (-h')h' = 0. \tag{49.66}$$

Damit verschwindet die Spur

Thus the trace vanishes

$$R^{(2)} = 0. \tag{49.67}$$

Weiter ist $R^{(2)}_{\alpha\beta} = 0$ und

Further one has $R^{(2)}_{\alpha\beta} = 0$ and

$$R^{(2)}_{\mu\nu} = s_\mu s_\nu\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta\prime\prime} + s_\mu s_\nu\frac{1}{4}h'_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta\prime}, \quad s_0 = -1, s_3 = +1. \tag{49.68}$$

Für einen Wellenzug mit endlicher Ausdehnung in x^3-Richtung folgt dann nach partieller Integration

For a wave-packet with finite extension in x^3 direction one obtains after partial integration

$$\int \mathrm{d}x^3 R^{(2)}_{\mu\nu} = -\int \mathrm{d}x^3 s_\mu s_\nu \frac{1}{4} h'_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta\prime}. \tag{49.69}$$

Wir können daher den Wellen einen Beitrag

Thus we may assign the contribution

$$t_{\mu\nu} = s_\mu s_\nu \frac{c^4}{32\pi k_\mathrm{N}} h'_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta\prime} \tag{49.70}$$

zum Energie-Impuls-Tensor zuordnen. Für eine Welle, die in negativer x^3-Richtung läuft, $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x^3 + x^0)$, erhält man das entsprechende Ergebnis, aber mit $s_0 = +1$. Damit erhalten wir in beiden Fällen die Energie

to the energy-momentum tensor. One obtains the corresponding result for a wave which moves in negative x^3 direction, $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x^3 + x^0)$, by choosing $s_0 = +1$. Thus we obtain in both cases the energy

$$E = \int \mathrm{d}^3 x\, t^{00} = \frac{c^4}{32\pi k_\mathrm{N}} \int \mathrm{d}^3 x h'_{\alpha\beta}(x) h^{\alpha\beta\prime}(x) \tag{49.71}$$

und für die 3-Komponente des Impulses P und der Energiestromdichte S (die 1- und 2-Komponente verschwindet)

and for the 3-component of the momentum P and the energy current density S (the 1- and 2-components vanish)

$$cP^3 = \frac{S^3}{c} = \int \mathrm{d}^3 x\, t^{03} = -s_0 E = \pm E, \tag{49.72}$$

wobei das +-Zeichen für die Welle in positiver x^3-Richtung und das −-Zeichen für die Welle in negativer x^3-Richtung gilt.

where the + sign holds for the wave in positive x^3 direction and the − sign for the wave in negative x^3 direction.

50 Gravitationsstrahlung

50.a Erzeugung der Wellen

Wir betrachten nun die Ausstrahlung von Gravitations-Wellen aus einem System von Massen, zum Beispiel zweier Sterne, die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Dabei gehen wir aus von Gleichung (46.32) in der Form

$$h^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -\frac{4k_{\mathrm{N}}}{c^4}\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T)(x^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}'). \tag{50.1}$$

Wir wollen die Wellen in großer Entfernung R_0 von den Massen betrachten und weiterhin annehmen, dass sich die Massen langsam im Vergleich zum Licht bewegen. Dann können wir jeweils $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = R_0$ annähern, so dass wir

$$h^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -\frac{4k_{\mathrm{N}}}{R_0c^4}\int \mathrm{d}^3x' (T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T)(t - R_0/c, \mathbf{x}') \tag{50.2}$$

nähern können. Wir können auch sagen, wir nehmen an, dass die Wellen eine Wellenlänge haben, die groß gegen die Ausdehnung des Systems ist. Im Folgenden geben wir die retardierte Zeit nicht mehr explizit an. Wir wollen nun $T^{\alpha\beta}$ und damit auch $h^{\alpha\beta}$ bestimmen. Hierzu verwenden wir den Erhaltungssatz

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0, \tag{50.3}$$

der für schwaches h gilt. Hieraus folgt

$$\partial_0 T^{\nu 0} + \partial_\alpha T^{\nu\alpha} = 0 \tag{50.4}$$

und damit

$$\partial_0 \int \mathrm{d}^3x T^{\alpha 0} x^\beta = -\int \mathrm{d}^3x (\partial_\gamma T^{\alpha\gamma}) x^\beta = -\int \mathrm{d}^3x \partial_\gamma (T^{\alpha\gamma}x^\beta) + \int \mathrm{d}^3x T^{\alpha\beta}. \tag{50.5}$$

Das erste Integral nach dem letzten Gleichheitszeichen lässt sich in ein Oberflächenintegral überführen und ergibt außerhalb der Massen 0. Damit bleibt nur das zweite Integral. Symmetrisieren wir bezüglich α und β, so folgt

$$\int \mathrm{d}^3x T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_0 \int \mathrm{d}^3x (T^{\alpha 0}x^\beta + T^{\beta 0}x^\alpha). \tag{50.6}$$

Ähnlich erhalten wir

$$\partial_0 \int \mathrm{d}^3x T^{00}(\mathbf{x}) x^\alpha x^\beta = -\int \mathrm{d}^3x (\partial_\gamma T^{\gamma 0}) x^\alpha x^\beta = -\int \mathrm{d}^3x \partial_\gamma (T^{\gamma 0}x^\alpha x^\beta) + \int \mathrm{d}^3x (T^{\alpha 0}x^\beta + T^{\beta 0}x^\alpha). \tag{50.7}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\int \mathrm{d}^3x T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_0^2 \int \mathrm{d}^3x T^{00} x^\alpha x^\beta. \tag{50.8}$$

50 Gravitational Radiation

50.a Generation of the Waves

We consider the emission of gravitational waves from a system of masses, for example of two stars rotating around their common center of mass. We start from equation (46.32) in the form

We consider the waves in large distances R_0 from the masses and assume that the masses move slowly in comparison to light. Then we may approximate $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = R_0$ so that we obtain approximately

We may say equally well that the waves have a wavelength large in comparison to the extension of the system. In the following we do not give the retarded time explicitly. We will now determine $T^{\alpha\beta}$ and thus $h^{\alpha\beta}$, too. For this purpose we use the conservation law

which holds for weak h. From this we obtain

and thus

The first integral after the last equality sign can be transformed into a surface integral and yields 0 outside the masses. Thus we are left with the second integral. Symmetrization with respect to α and β yields

Similarly we obtain

This yields finally

Gehen wir von einer Massendichte $\mu(x)$ aus, so ist $T^{00} = \mu c^2$. Berücksichtigen wir weiter, dass wir den $\eta^{\mu\nu}T$-Term auf der rechten Seite von 50.1 und 50.2 entfernen können, in dem wir links ein $-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}$ hinzufügen, so erhalten wir

Starting from a mass density $\mu(x)$ we have $T^{00} = \mu c^2$. Further considering that we can remove the $\eta^{\mu\nu}T$ term on the right hand-side of 50.1 and 50.2 by adding $-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}$ on the left hand-side, we obtain

$$h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h^{\lambda}{}_{\lambda} = -\frac{2k_\mathrm{N}}{R_0 c^4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{D}^{\alpha\beta}(t - R_0/c) \tag{50.9}$$

mit

with

$$\mathcal{D}^{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3x\mu(x)x^\alpha x^\beta. \tag{50.10}$$

50.b Energie-Abstrahlung

50.b Energy Emission

Betrachtet man etwa die Ausbreitung in x^3-Richtung, so hat man dort eine Energie-Stromdichte

Considering the propagation in x^3 direction one obtains there the energy current density

$$S = \frac{c^5}{32\pi k_\mathrm{N}}h'_{\alpha\beta}(x)h^{\alpha\beta\prime}(x) = \frac{c^3}{32\pi k_\mathrm{N}}\dot{h}_{\alpha\beta}\dot{h}^{\alpha\beta} = \frac{c^3}{16\pi k_\mathrm{N}}\left(\dot{h}_{12}\dot{h}_{21} + \left(\frac{\dot{h}_{11} - \dot{h}_{22}}{2}\right)^2\right). \tag{50.11}$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, dass nur die Transversal-Komponenten 1 und 2 beitragen, und dass $\frac{\partial h}{\partial x^3} = \frac{\partial h}{\partial R_0} = -\frac{\partial h}{\partial(ct)}$. Den Ausdruck

We have taken into account that only the transversal components 1 and 2 contribute, and that $\frac{\partial h}{\partial x^3} = \frac{\partial h}{\partial R_0} = -\frac{\partial h}{\partial(ct)}$. The expression

$$h_{12}h_{21} + \left(\frac{h_{11} - h_{22}}{2}\right)^2 \tag{50.12}$$

müssen wir für beliebige Richtungen $x^\alpha = R_0 n^\alpha$ verallgemeinern. Hierfür stehen die folgenden Skalare im dreidimensionalen Raum zur Verfügung

has to be generalized for arbitrary directions $x^\alpha = R_0 n^\alpha$. For this purpose the following scalars in three-dimensional space are available

$$c_1 h_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta h_{\gamma\delta}n^\gamma n^\delta + c_2 h_{\alpha\beta}n^\alpha h_\gamma{}^\beta n^\gamma + c_3 h^\alpha{}_\alpha h^\beta{}_\beta + c_4 h^\alpha{}_\beta h^\beta{}_\alpha + c_5 h_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta h^\gamma{}_\gamma \tag{50.13}$$

Die Koeffizienten c_i müssen so gewählt werden, dass sie für $n^1 = n^2 = 0$, $n^3 = 1$ gerade den Ausdruck (50.12) ergeben. Hierzu wertet man obigen Ausdruck für dieses n aus,

The coefficients c_i have to be chosen so that they yield just the expression (50.12) for $n^1 = n^2 = 0$, $n^3 = 1$. Thus we evaluate the expression above for this n,

$$\begin{aligned}&\underbrace{(c_3 + c_4)}_{1/4}((h_{11})^2 + (h_{22})^2) + \underbrace{2c_4}_{1/2}(h_{12})^2 + \underbrace{2c_3}_{-1/2}h_{11}h_{22}\\ &+ \underbrace{(2c_3 - c_5)}_{0}(h_{11} + h_{22})h_{33} + \underbrace{(-c_2 + 2c_4)}_{0}((h_{13})^2 + (h_{23})^2) + \underbrace{(c_1 - c_2 + c_3 + c_4 - c_5)}_{0}h_{33}^2.\end{aligned} \tag{50.14}$$

Daraus folgt

This yields

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{4}, \quad c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_5 = -\frac{1}{2}. \tag{50.15}$$

und die Energiestromdichte

and the energy current density

$$S = \frac{c^3}{16\pi k_\mathrm{N}}\left(\frac{1}{4}\dot{h}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \dot{h}_{\gamma\delta}n^\gamma n^\delta + \dot{h}_{\alpha\beta}n^\alpha \dot{h}_\gamma{}^\beta n^\gamma - \frac{1}{4}\dot{h}^\alpha{}_\alpha \dot{h}^\beta{}_\beta + \frac{1}{2}\dot{h}^\alpha{}_\beta \dot{h}^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2}\dot{h}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \dot{h}^\gamma{}_\gamma\right). \tag{50.16}$$

Um die abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit zu erhalten, müssen wir den Ausdruck über die Kugeloberfläche mit Radius R_0 integrieren. Wir verwenden dazu das Integral (49.35) über den Raumwinkel Ω und das Integral

In order to obtain the radiated energy per time we have to integrate this expression over the surface of the sphere of radius R_0. To this end we use the integral (49.35) over the solid angle Ω and the integral

$$\int \mathrm{d}\Omega\, n^\alpha n^\beta n^\gamma n^\delta = \frac{4\pi}{15}\left(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}\right). \tag{50.17}$$

Da als Tensor, durch den das Integral ausgedrückt werden kann, nur η zur Verfgung steht, ist es eine Linearkombination von $\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}$ und seinen Permutationen. Da das Ergebnis gegen Permutationen aller vier Indices invariant sein muss, bleibt nur die angegebene Linearkombination. Den Vorfaktor erhält man aus der Bedingung

Since η is the only available tensor, by which this integral can be expressed, it is a linear combination of $\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}$ and its permutations. Since the result has to be invariant against permutations of all four indices, there is only the given linear combination. The prefactor is obtained from the condition

$$\int \mathrm{d}\Omega\, n^\alpha n_\alpha n^\beta n_\beta = -\int \mathrm{d}\Omega\, n^\alpha n_\alpha = \int \mathrm{d}\Omega\, 1 = 4\pi. \tag{50.18}$$

Damit erhalten wir für die abgestrahlte Leistung

Thus we obtain for the emitted power

$$\int \mathrm{d}fS = \frac{c^3 R_0^2}{4k_\mathrm{N}}\left(\frac{1}{5}\dot{h}^\alpha{}_\beta \dot{h}^\beta{}_\alpha - \frac{1}{15}\dot{h}^\alpha{}_\alpha \dot{h}^\beta{}_\beta\right) = \frac{1}{5}(\dot{h}^\alpha{}_\beta - \frac{1}{3}\delta^\alpha{}_\beta \dot{h}^\gamma{}_\gamma)(\dot{h}^\beta{}_\alpha - \frac{1}{3}\delta^\beta{}_\alpha \dot{h}^\delta{}_\delta). \tag{50.19}$$

Daher verwendet man zweckmäßigerweise die Quadrupolmomente

Thus it is appropriate to use the quadrupole moments

$$\hat{\mathcal{D}}^{\alpha\beta} = \mathcal{D}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\eta^{\alpha\beta}\mathcal{D}^\gamma{}_\gamma = \int \mathrm{d}^3x \mu(x)\left(x^\alpha x^\beta - \frac{1}{3}\eta^{\alpha\beta}x^\gamma x_\gamma\right) \tag{50.20}$$

und erhalten schließlich für die abgestrahlte Leistung

so that finally we obtain the radiated power

$$\int \mathrm{d}fS = \frac{k_\mathrm{N}}{5c^5}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\hat{\mathcal{D}}^\alpha{}_\beta \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\hat{\mathcal{D}}^\beta{}_\alpha. \tag{50.21}$$

Diese Strahlung ist eine Quadrupolstrahlung und enthält daher für eine periodische Rotation der Massen mit der Frequenz ω den Faktor ω^6. Eine Dipolstrahlung tritt bei Gravitationswellen nicht auf, da der Schwerpunkt nicht oszilliert.

This radiation is a quadrupole radiation and thus contains for a periodic rotation of the masses with frequency ω the factor ω^6. There is no dipolar radiation in gravitation since the center of gravity does not oscillate.