N

Sterne

Stars

51 Sterngleichgewicht

Ein Stern ist eine große Ansammlung von Materie. Die Gravitation tendiert dazu, den Stern immer weiter zu komprimieren. Er ist im Gleichgewicht, wenn der Gravitationsdruck mit dem Materiedruck übereinstimmt.

51 Star Equilibrium

A star is a large accumulation of matter. Gravitation has the tendency to compress the star on and on. It is in equilibrium if the gravitational pressure coincides with the pressure of matter.

$$P_{\text{grav}} = P_{\text{mat}}. \tag{51.1}$$

Wir betrachten hier den Druck der Materie in verschiedenen Zuständen und den N schen Limes des Gravitationsdruckes. Wir gehen im Weiteren stets von einem zentralsymmetrischen Aufbau aus. Daher hängen Druck P und die Massendichte μ nur vom Abstand r vom Ursprung ab. Im Newtonschen Limes, in dem sich Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie noch nicht auswirken, ist die Kraftdichte k, die zugleich den Gradienten des Drucks beschreibt, gegeben durch

We consider here the pressure of matter in various states and the N ian limit of gravitational pressure. In the following we assume always that the star is central symmetric. Thus pressure P and density of matter μ depend only on the distance r from the origin. The force density k which is also the gradient of the pressure is in the N ian limit, in which the effects of general relativity are not yet important, given by

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{grav}}(r)}{\mathrm{d}r} = k = -\frac{\mu(r) k_{\text{N}} \mathcal{M}(r)}{r^2}. \tag{51.2}$$

Dabei ist $\mathcal{M}(r)$ die Masse in der Kugel von Radius r,

Here $\mathcal{M}(r)$ is the mass of a sphere of radius r,

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \mu(r'). \tag{51.3}$$

51.a Hauptreihensterne

Wir können hier nur kurz einige Aspekte der Sternentwicklung angeben. Die Entwicklung eines Sterms hängt wesentlich von seiner Masse ab. Ist sie hinreichend gering, so wird er sich zwar komprimieren, wie es bei Planeten wie der Erde der Fall ist. Durch dieses Komprimieren erhöht sich auch seine Temperatur. So hat die Erde im Inneren eine Temperatur von etwa 5000^0. Ist seine Masse größer wie etwa die des Jupiter, so kann die Erwärmung zu einem schwachen Leuchten führen.

51.a Main Sequence Stars

Here we can only give a few aspects of the evolution of stars. The evolution depends essentially on its mass. If it is sufficiently low, then it will compress as it is for a planet like the earth. This compression increases its temperature. Thus the earth has internally a temperature of approximately 5000^0. If its mass is larger as Jupiter's then the heating may lead to weak glowing.

Kommt die Masse an die Sonnenmasse $M_\odot$ heran, so erreicht die Materie im Inneren einen Druck und eine Temperatur, die zur Kernfusion führt. Zunächst wird im Zentrum des Sterns Wasserstoff in Helium verbrannt. Dies führt natürlich zu einer Aufheizung des Sterns. Dann kann man den Materiedruck als Druck des klassischen idealen Gases angeben

If the mass approaches the mass of the sun $M_\odot$ then the matter in the interior reaches a pressure and a temperature sufficient for nuclear fusion. Initially hydrogen is burned to helium in the center of the star. This leads to a heating of the star. Then the pressure of matter can be given by that of a classical ideal gas

$$P_{\mathrm{mat}} = nk_{\mathrm{B}}T = \frac{\mu k_{\mathrm{B}}T}{m} \tag{51.4}$$

mit der Teilchendichte n, Boltzmann-Konstante k_{B}, Temperatur T und der Masse m der Gasteilchen.

with the particle density n, Boltzmann constant k_{B}, temperature T and mass m of the gas particles.

Typischerweise beträgt die Temperatur auf Grund der Kernreaktion im Zentrum etwa $k_{\mathrm{B}}T = 1$ keV, die Masse des Protons $m = 1\ \mathrm{GeV}/c^2$. Damit folgt für Hauptreihensterne ein Druck $P(0)$ im Zentrum

The temperature in the center is typically $k_{\mathrm{B}}T = 1$ keV due to the nuclear reaction, the mass of the proton is $m = 1\ \mathrm{GeV}/c^2$. Then one obtains for the main sequence stars the pressure $P(0)$ in the center.

$$\frac{P_{\mathrm{mat}}(0)}{\mu c^2} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2} \approx 10^{-6}. \tag{51.5}$$

Nehmen wir andererseits eine konstante Dichte μ des Sterns an, so folgt

If we assume a constant density μ of the star, then we obtain

$$\mathcal{M}(r) = \frac{4\pi}{3}\mu r^3, \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -k_{\mathrm{N}}\mu^2\frac{4\pi}{3}r, \tag{51.6}$$

was

which yields

$$P_{\mathrm{grav}}(r) = P_{\mathrm{grav}}(0) - \frac{2\pi}{3}k_{\mathrm{N}}\mu^2 r^2 \tag{51.7}$$

ergibt. Der Druck an der Oberfläche $P(R)$ ist gleich Null. Daraus folgt die Abschätzung für den Zentraldruck

The pressure at the surface $P(r)$ is zero. Thus we obtain the estimate for the central pressure

$$P_{\mathrm{grav}}(0) = \frac{k_{\mathrm{N}}M\mu}{2R} \tag{51.8}$$

und damit

and thus

$$\frac{P(0)}{\mu c^2} = \frac{r_g}{4R} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2} \approx 10^{-6}. \tag{51.9}$$

Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie sind also vernachlässigbar. Wenn der Wasserstoff des Sternkerns verbraucht ist, verlagert sich die Wasserstoffbrennzone weiter nach außen. Die Energie drückt die äußeren Bereiche nach außen, die sich dabei auch abkühlen. Es entsteht ein Roter Riese. Weitere Fusionszyklen (Helium in Kohlenstoff, Kohlenstoff in Eisen) können sich anschließen. Schließlich ist der Stern ausgebrannt, kühlt sich ab und kollabiert, wobei äußere Schichten nach außen abgestoßen werden können. Dann entsteht im Zentrum ein entarteter Sterne oder ein schwarzes Loch.

Thus effects of general relativity are negligible. When the hydrogen of the star core is used up then surrounding shells will begin with hydrogen fusion. The energy pushes the outermost layers of the star outward, causing them to expand and cool. A red giant evolves. Further cycles of fusion may follow (helium to carbon, carbon to iron). Finally the star is burned out and collapses, where outer layers may be pushed off. Then a degenerate star or a black hole may evolve in the center.

51.b Entartete Sterne

51.b Degenerate Stars

In einem entarteten Stern tritt an Stelle des thermischen Drucks der F -Druck. Die Energieniveaus der Fermionen werden bis zur F kante aufgefüllt. Beim weißen Zwerg sind dies die Elektronen, die den wesentlichen Druckbeitrag liefern. Werden alle Zustände eines Spin 1/2-Teilchens bis zum F -Impuls p_F besetzt, so folgt für die Teilchendichte

In a degenerate star the F pressure will replace the thermal pressure. The energy levels are filled up to the F edge. For a white dwarf the electrons will yield the main contribution to the pressure. If all states of a spin 1/2 particle are occupied up to F momentum p_F, then we obtain the particle density

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \mathrm{d}^3 p = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p_F^3}{3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{51.10}$$

Der zugehörige Druck P ergibt sich zu

The corresponding pressure P is given by

$$P = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \mathrm{d}^3 p v_x p_x = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \mathrm{d}^3 p \frac{p^2}{3\sqrt{m^2 + p^2/c^2}}. \tag{51.11}$$

Dieses Integral lässt sich im Limes kleiner und großer F -Impulse auswerten

This integral may be evaluated in the limit of small and large F momenta

$$P = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \mathrm{d}^3 p \frac{p^2}{3m} = \frac{n(3\pi^2\hbar^3 n)^{2/3}}{5m} \qquad p_F \ll mc \tag{51.12}$$

$$P = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \mathrm{d}^3 p \frac{pc}{3} = \frac{nc(3\pi^2\hbar^3 n)^{1/3}}{4} \qquad p_F \gg mc. \tag{51.13}$$

Der Druck wächst daher je nach Bereich mit $n^{4/3}$ oder $n^{5/3}$ an, wobei n die Elektronendichte ist. Die Kerne tragen wegen ihrer wesentlichen größeren Masse praktisch nicht zum Druck bei, stellen aber den wesentlichen Beitrag zur Massendichte μ. Wir erhalten

Depending on the regime the pressure increases as $n^{4/3}$ and $n^{5/3}$, resp., where n is the density of the electrons. Practically the nuclei do not contribute to the pressure because of their larger masses, however, they supply the essential contribution to the mass density μ. We obtain

$$\mu = \sigma n m_n \tag{51.14}$$

mit der Neutronenmasse m_n und dem Verhältnis σ von Atomgewicht und Kernladungszahl

with neutron mass m_n and the ratio σ of mass number and atomic number

$$\sigma = \frac{A}{Z}. \tag{51.15}$$

Für Helium hat man $\sigma = 4/2 = 2$, für Eisen $\sigma = 56/26 \approx 2.15$. Führen wir noch den charakteristischen Impuls

For helium one has $\sigma = 4/2 = 2$, for iron $\sigma = 56/26 \approx 2.15$. If we introduce the characteristic momentum

$$p_c = m_e c, \tag{51.16}$$

der den Übergang zwischen den beiden Potenzgesetzen markiert, so erhalten wir die zugehörige charakteristische Dichte

which marks the transition between both power laws, then we obtain the associate characteristic density

$$\mu_c = \frac{\sigma m_n}{3\pi^2\hbar^3}(m_e c)^3 \approx 2 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \tag{51.17}$$

und

and

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2\hbar^3} \left(\frac{\mu}{\mu_c}\right)^{5/3}, \qquad \mu \ll \mu_c, \tag{51.18}$$

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2\hbar^3} \left(\frac{\mu}{\mu_c}\right)^{4/3}, \qquad \mu \gg \mu_c. \tag{51.19}$$

Für diese polytropen Zustandsgleichungen

For this polytropic equation of state

$$P = K\mu^{\gamma} \tag{51.20}$$

kann man die Differentialgleichung für Druck und Dichte in Abhängigkeit von r aufstellen. Aus (51.2) folgt

the differential equation for pressure and density as functions of r can be established. We obtain from (51.2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right) = -k_{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}r} = -4\pi k_{\mathrm{N}}\mu r^2. \tag{51.21}$$

Daraus folgt

Thus we obtain

$$K\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\mu^{\gamma-2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi k_{\mathrm{N}}\mu r^2. \tag{51.22}$$

Mit

With

$$\Theta = \left(\frac{\mu(r)}{\mu(0)}\right)^{\gamma-1} \tag{51.23}$$

und dem dimensionslosen Radius

and the dimensionless radius

$$x = \left(\frac{4\pi k_{\mathrm{N}}(\gamma-1)}{K\gamma}\right)^{1/2}\mu_0^{1-\gamma/2}r, \quad \mu_0 := \mu(0) \tag{51.24}$$

folgt die Differentialgleichung der Lane-Emden-Funktion zum Index n.

yields the differetial equation of the Lane-Emden function of index n.

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right) + \Theta^n = 0, \quad n = \frac{1}{\gamma-1}. \tag{51.25}$$

Die Funktion beginnt bei $\Theta(0) = 1$ gemäß Definition. Weiter ist $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$ am Ursprung gleich Null. Mit diesen Anfangsbedingungen folgt

According to the definition the function starts at $\Theta(0) = 1$. Further one has a vanishing $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$ at the origin. One obtains with these initial conditions

$$\Theta(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4 + O(x^6). \tag{51.26}$$

Für $n > 6/5$ hat die Funktion eine oder mehrere Nullstellen. An der ersten Nullstelle x_1 wird die Dichte Null. Diese Stelle gibt den Sternradius an

The function has one or several zeroes for $n > 6/5$. The density becomes zero at the first zero x_1. This yields the radius of the star

$$R = \left(\frac{K\gamma}{4\pi k_{\mathrm{N}}(\gamma-1)}\right)^{1/2}\mu_0^{\gamma/2-1}x_1. \tag{51.27}$$

Die Masse des Sterns ergibt sich zu

The mass of the star is given by

$$M = 4\pi\mu_0^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{K\gamma}{4\pi k_{\mathrm{N}}(\gamma-1)}\right)^{3/2}\int_0^{x_1}\mathrm{d}x\,x^2\Theta^n. \tag{51.28}$$

Dies lässt sich mittels der Differentialgleichung umschreiben in

This can be rewritten by use of the differential equation

$$M = 4\pi\mu_0^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{K\gamma}{4\pi k_{\mathrm{N}}(\gamma-1)}\right)^{3/2}x_1^2|\Theta'(x_1)| \tag{51.29}$$

Man findet

One obtains

$$\begin{array}{ccc} n & 3/2 & 3 \\ \gamma & 5/3 & 4/3 \\ x_1 & 3.65 & 6.90 \\ \Theta'(x_1) & -0.203 & -0.0424 \end{array} \tag{51.30}$$

Unter Verwendung von (51.18, 51.19) folgt dann

By use of (51.18, 51.19) one obtains

$$M = \begin{cases} \frac{2.79}{\sigma^2}\left(\frac{\mu_0}{\mu_c}\right)^{1/2} M_\odot & \mu_0 \ll \mu_c \\ \frac{5.87}{\sigma^2} M_\odot = M_C & \mu_0 \gg \mu_c, \end{cases} \tag{51.31}$$

$$R = \begin{cases} \frac{2.00}{\sigma}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}\right)^{1/6} 10^4\mathrm{km} & \mu_0 \ll \mu_c \\ \frac{5.33}{\sigma}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}\right)^{1/3} 10^4\mathrm{km} & \mu_0 \gg \mu_c, \end{cases} \tag{51.32}$$

Weiße Zwerge haben eine Massenobergrenze (C -Grenzmasse). Für einen Weißen Zwerg aus Eisen erhält man

White dwarfs have a maximum mass (C limit). One obtains for a white dwarf consisting of iron

$$M_C = 1.27 M_\odot. \tag{51.33}$$

Bei dieser Masse geht die Dichte μ_0 gegen Unendlich, wie auch der Druck $P(0)$. Allerdings wird der Weiße Zwerg schon vorher instabil. Überschreitet nämlich die F -Energie der Elektronen den Wert

At this mass the density μ_0 approaches infinity and thus also the central pressure $P(0)$. It turns out, however, that the white dwarf becomes unstable alredy before reaching this mass. If the F energy of the electrons exceeds

$$\Delta E = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 1.5 m_e c^2, \tag{51.34}$$

dann können die Elektronen an der F kante mit den Protonen den inversen Beta-Zerfall durchlaufen. Aus Proton und Elektron wird ein Neutron und Neutrino, $p^+ + e^- \leftrightarrow n + \nu$. Das Neutrino entweicht. Dieser Übergang in einen Neutronenstern kann sehr dramatisch verlaufen. Im zurückbleibenden Neutronenstern kann man unter Vernachlässigung der starken Wechselwirkung zwischen den Neutronen die entsprechende Rechnung durchführen. Dazu muss man jetzt die Elektronenmasse durch die Neutronenmasse ersetzen. Weiter gilt jetzt $\sigma = 1$. Damit erhält man die charakteristische Dichte

then the electrons at the F edge can perform the inverse beta decay with the protons. Proton and electron become neutron and neutrino, $p^+ + e^- \leftrightarrow n + \nu$. The neutrino escapes. This transition to a neutron star may proceed very dramatically. One may perform the corresponding calculation for the remaining neutron star if one neglects the strong interaction between the neutrons. For this purpose one has to replace the electron mass by the neutron mass. Furthermore one has $\sigma = 1$. Then one obtains the characteristic density

$$\mu_c = \frac{m_n^4 c^2}{3\pi^2\hbar^3} \approx 6 \cdot 10^{18}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \tag{51.35}$$

sowie Masse und Radius für $\mu_0 \ll \mu_c$

$$M = 2.7\left(\frac{\mu_0}{\mu_c}\right)^{1/2} M_\odot, \tag{51.36}$$

$$R = 11\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}\right)^{1/6} \mathrm{km}. \tag{51.37}$$

Für $\mu_0 \gg \mu_c$ werden Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie wichtig. Für $\mu_0 \approx \mu_c$ wird $R \approx 10$ km. Setzen wir noch $M = M_\odot$, so finden wir

For $\mu_0 \gg \mu_c$ the effects of general relativity become important. For $\mu_0 \approx \mu_c$ the radius becomes $R \approx 10$ km. If we put $M = M_\odot$, then we obtain

$$\frac{r_g}{R} \approx 0.3. \tag{51.38}$$

Auch ist bei solch hohen Dichten die Wechselwirkung der Neutronen untereinander nicht mehr zu vernachlässigen. Modellrechnungen zur Grenzmasse ergeben

At such high densities the interaction of the neutrons with each other is no longer negligible. Model calculations yield mass limits

$$1.5 M_\odot \leq M_C \leq 3 M_\odot. \tag{51.39}$$

Bleibt beim Kollaps eine größere Masse zurück, so kollabiert diese zu einem schwarzen Loch.

If there remains a larger mass during the collaps, then it will collaps to a black hole.

52 Innere SCHWARZSCHILD-Metrik

52 Interior SCHWARZSCHILD metric

52.a Metrik eines sphärischen statischen Sterns

52.a Metric of a spherical static Star

Wir bestimmen nun und lösen die E schen Feldgleichungen im Inneren eines sphärischen statischen Sterns. Dazu gehen wir wieder aus von der Metrik (47.8), setzen aber bereits $C(r) = r^2$,

Now we determine and solve E 's field equations inside a spherical static star. We start again from the metric (47.8), but we set already $C(r) = r^2$,

$$ds^2 = A(r)c^2 dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{52.1}$$

Die E schen Gleichungen lauten wieder

Again E 's equations read

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k_N}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \tag{52.2}$$

Für den Energie-Impuls-Tensor erhalten wir

We obtain for the energy-momentum tensor

$$T_{\mu\nu} = (\mu + \frac{P}{c^2})u_\mu u_\nu - Pg_{\mu\nu}. \tag{52.3}$$

Dabei ist die Massendichte μ genau genommen die Energie-Dichte dividiert durch c^2, $\mu = \epsilon/c^2$, wobei sich die Dichte auf das lokale Ruhesystem bezieht, so dass sich das Massenelement zu

The mass density μ is here the energy density divided by c^2, $\mu = \epsilon/c^2$, where the density refers to the local rest system, so that the mass element can be written

$$dM = d^3x\sqrt{-g}\mu(x) \tag{52.4}$$

ergibt in Übereinstimmung mit den Überlegungen aus dem Abschnitt 32.c und Gleichung(43.20). Die Materie ruht in diesem Koordinaten-System. Daher ist

in agreement with the considerations in section 32.c and equation (43.20). The matter is at rest in this coordinate system. Thus we have

$$u_\alpha = 0. \tag{52.5}$$

Die Null-Komponente von u folgt aus (wir betrachten $x^0 = ct$)

The zero-component of u is obtained from (we consider $x^0 = ct$)

$$c^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = A(u^0)^2, \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{A}}, \quad u_0 = g_{00}u^0 = c\sqrt{A}. \tag{52.6}$$

Damit erhält man

Thus one obtains

$$(T..) = \mathrm{diag}(\mu c^2 A, PB, Pr^2, Pr^2\sin^2\theta) \tag{52.7}$$

und

and

$$T = T^\nu{}_\nu = \mu c^2 - 3P. \tag{52.8}$$

Unter Verwendung des in (47.20-47.22) berechneten R -Tensors folgen die Gleichungen

By means of the R tensor calculated in (47.20-47.22) the following equations are obtained

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} + \frac{A'^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{2Br} = \frac{4\pi k_N}{c^4}A(\mu c^2 + 3P), \tag{52.9}$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB} = \frac{4\pi k_N}{c^4}B(\mu c^2 - P), \tag{52.10}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} = \frac{4\pi k_N}{c^4}r^2(\mu c^2 - P). \tag{52.11}$$

Die Gleichung für $R_{\phi\phi}$ ist die gleiche wie die für $R_{\theta\theta}$ nur multipliziert mit $\sin^2\theta$. Wir erhalten aus

The equation for $R_{\phi\phi}$ is the same as the one for $R_{\theta\theta}$ only multiplied by $\sin^2\theta$. We obtain from

$$r^2\frac{R_{00}}{2A}+r^2\frac{R_{rr}}{2B}+R_{\theta\theta}=\frac{rB'}{B^2}+1-\frac{1}{B}=\frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^2}\mu r^2. \tag{52.12}$$

Dies lässt sich schreiben

This can be rewritten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r}{B(r)}=1-\frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^2}\mu r^2 \tag{52.13}$$

und aufintegrieren zu

and can be integrated to

$$B(r)=\left(1-\frac{2k_{\mathrm{N}}\mathcal{M}(r)}{c^2r}\right)^{-1} \tag{52.14}$$

mit

with

$$\mathcal{M}(r)=4\pi\int_0^r \mathrm{d}r'\,r'^2\mu(r'). \tag{52.15}$$

Ähnlich erhalten wir

Similarly we obtain

$$r^2\frac{R_{00}}{2A}+r^2\frac{R_{rr}}{2B}-R_{\theta\theta}=\frac{rA'}{AB}-1+\frac{1}{B}=\frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{c^4}P. \tag{52.16}$$

Lösen wir nach A'/A auf und setzen B ein, so erhalten wir

Solving for A'/A and inserting B we obtain

$$\frac{A'}{A}=\frac{2k_{\mathrm{N}}}{c^2r^2}\left(\mathcal{M}+\frac{4\pi r^3P}{c^2}\right)\left(1-\frac{2k_{\mathrm{N}}\mathcal{M}}{c^2r}\right)^{-1}, \tag{52.17}$$

was sich mit der Randbedingung $A(\infty)=1$ formal aufintegrieren lässt.

which can be integrated formally with the boundary condition $A(\infty)=1$.

Wir wollen nun eine Gleichung für $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$ herleiten. Dazu gehen wir aus von $T^{r\nu}{}_{;\nu}=0$. Dabei werten wir die beiden Beiträge von

Now we derive an equation for $\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$. For this purpose we start from $T^{r\nu}{}_{;\nu}=0$. We evaluate separately the two contributions of

$$T^{\mu\nu}=(\mu+\frac{P}{c^2})u^\mu u^\nu-Pg^{\mu\nu} \tag{52.18}$$

getrennt aus,

$$T^{r\nu}{}_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}(\mu+\frac{P}{c^2})u^ru^\nu)+\Gamma^r{}_{\nu\lambda}(\mu+\frac{P}{c^2})u^\lambda u^\nu-(Pg^{r\nu})_{;\nu}=\Gamma^r{}_{00}(\mu+\frac{P}{c^2})u^0u^0-g^{rr}\partial_rP. \tag{52.19}$$

Mit

With

$$\Gamma^r{}_{00}=-\frac{g^{rr}}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial r}=\frac{A'}{2B} \tag{52.20}$$

folgt aus $T^{r\nu}{}_{;\nu}=0$ die Beziehung

we obtain from $T^{r\nu}{}_{;\nu}=0$ the relation

$$\frac{A'}{A}=-\frac{2P'}{\mu c^2+P}. \tag{52.21}$$

Kombinieren wir diese Gleichung mit Gleichung (52.17), so folgt die O -V -Gleichung

Combining this equation with equation (52.17) one obtains the O -V equation

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}=-\frac{G\mathcal{M}\mu}{r^2}\left(1+\frac{P}{\mu c^2}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3P}{\mathcal{M}c^2}\right)\left(1-\frac{2k_{\mathrm{N}}\mathcal{M}}{c^2r}\right)^{-1}. \tag{52.22}$$

52.b Inkompressibler relativistischer Stern

52.b Incompressible relativistic Star

Wir wenden hier die O -V -Gleichung auf einen Stern aus inkompressibler Materie an,

We apply the O -V equation to a star of incompressible matter,

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_0 & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases} \tag{52.23}$$

Wir nehmen also an, dass die Dichte unabhängig vom Druck ist. Dann ergibt sich $\mathcal{M}$ zu

We assume that the density is independent of the pressure. Then we obtain $\mathcal{M}$ as

$$\mathcal{M}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\mu_0 r^3 = M\frac{r^3}{R^3} & r \le R, \\ \frac{4\pi}{3}\mu_0 R^3 = M & r \ge R. \end{cases} \tag{52.24}$$

Diese Masse M wird als gravitierende Masse oder einfach als Masse des Sterns bezeichnet. Die O -V -Gleichung ergibt nun im Bereich $r \le R$

This mass M is called gravitational mass or simply mass of the star. The O -V equation yields now in the region $r \le R$

$$\frac{P'}{(P+\mu_0 c^2)(P+\mu_0 c^2/3)} = -\frac{4\pi k_{\rm N} r}{c^4}\left(1 - \frac{8\pi k_{\rm N}\mu_0 r^2}{3c^2}\right)^{-1}. \tag{52.25}$$

Die Integration ergibt

The integration yields

$$\ln\left(\frac{P+\mu_0 c^2}{3P+\mu_0 c^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{8\pi k_{\rm N}\mu_0 r^2}{3c^2}\right) + \text{const.} \tag{52.26}$$

Am Sternenrand verschwindet der Druck, $P(R) = 0$. Dann folgt

The pressure at the surface of the star vanishes, $P(R) = 0$. Then we obtain

$$\frac{P(r)+\mu_0 c^2}{3P(r)+\mu_0 c^2} = \left(\frac{1 - 8\pi k_{\rm N}\mu_0 R^2/3c^2}{1 - 8\pi k_{\rm N}\mu_0 r^2/3c^2}\right)^{1/2} \tag{52.27}$$

Wir führen nun den S -Radius

We introduce the S radius

$$4\pi k_{\rm N}\mu_0 R^3/(3c^2) = k_{\rm N} M/c^2 = r_g/2 \tag{52.28}$$

ein und erhalten für den Innenbereich

and obtain for the interior region

$$P(r) = \mu_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{R^3}}}. \tag{52.29}$$

Im Zentrum des Sterns baut sich demnach ein Druck

Thus in the center of the star one obtains the pressure

$$P(0) = \mu_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} - 1} \tag{52.30}$$

auf. Dort ist der Gravitationsdruck maximal. Man sieht, dass dieser Druck für $R \to 9r_g/8$ divergiert, da dann der Nenner verschwindet. Unterschreitet R diesen Wert, so ist der Stern instabil und der Stern kollabiert. Man kann zeigen, dass dieses Stabilitätskriterium

. There the gravitational pressure is maximal. One sees that this pressure diverges for $R \to 9r_g/8$ since then the denominator diverges. If R falls below, then the star is unstable and the star collapses. One can show that this stability criterion

$$R > \frac{9}{8} r_g \tag{52.31}$$

unter allgemeineren Bedingungen erfüllt werden muss.

$A(r)$ und $B(r)$ können aufintegriert werden zu

$$A(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{R}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{R^3}}\right)^2 & r \le R \\ 1-\frac{r_g}{r} & r \ge R \end{cases} \quad (52.32)$$

$$B(r) = \begin{cases} \left(1-\frac{r_g r^2}{R^3}\right)^{-1} & r \le R \\ \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1} & r \ge R. \end{cases} \quad (52.33)$$

52.c Rotverschiebung und Massendefekt

Licht, das von der Oberfläche des Sterns ausgesandt wird, wird in großer Entfernung mit der Gravitations-Rotverschiebung

$$z = \frac{\omega_R}{\omega_\infty} - 1 = \sqrt{\frac{g_{00}(\infty)}{g_{00}(R)}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{R}}} - 1 \quad (52.34)$$

beobachtet. Wegen der Einschränkung (52.31) folgt $z < 2$. Ein größeres z ist möglich, wenn es aus dem Inneren eines transparenten Sterns oder vom Rand eines schwarzen Lochs kommt oder auf Grund der kosmologische Rotverschiebung.

Die Masse $M = \mathcal{M}(R)$, die die Gravitation im Außenraum bestimmt, ist nicht die konstitutive Masse M_k, aus der der Körper zusammengesetzt ist, denn

$$M_\mathrm{k} = 4\pi\mu \int_0^R \sqrt{g_{rr}} r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\mu \int_0^R \frac{r^2 \mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{r_g r^2}{R^3}}}. \quad (52.35)$$

Im Extremfall $R = 9r_g/8$ findet man

$$M_\mathrm{k} = 1.64\mathcal{M}. \quad (52.36)$$

Die Differenz der beiden Massen wird als Massendefekt bezeichnet.

has to be fulfilled under quite general conditions.

$A(r)$ and $B(r)$ can be integrated to

52.c Red Shift and Mass Defect

Light which is emitted at the surface of the star, will be observed at large distance with the gravitational red shift

. Due to the constraint (52.31) one has $z < 2$. A larger z is possible, if the light comes from the interior of a transparent star or from the edge of a black hole or due to the cosmological red shift.

The mass $M = \mathcal{M}(R)$, which determines the gravitation outside the star, is not the constitutive mass M_k, from which the star is comprised,

In the extreme case $R = 9r_g/r$ one obtains

The differenc of both masses is called mass defect.

53 Gravitations-Kollaps

53 Gravitational Collapse

53.a Isotrope zeitabhängige Metrik

53.a Isotropic time-dependent metric

Wir betrachten nun eine isotrope zeitabhängige Metrik und wählen diesmal $g_{00} = 1$, also unabhängig von Ort und Zeit, setzen aber $g_{0\alpha} = 0$, arbeiten also in der temporalen Eichung,

We consider an isotropic time-dependent metric and choose this time $g_{00} = 1$, independent of space and time, but put $g_{0\alpha} = 0$, thus we work with a temporal gauge,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - B(r,t)dr^2 - C(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{53.1}$$

Diese Koordinaten werden als G -Koordinaten bezeichnet. Sie haben die Eigenschaft, dass

These coordinates are called G ian coordinates. They have the property that

$$\Gamma^\mu{}_{00} = g^{\mu\nu}\left(\partial_0 g_{\nu 0} - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{00}\right) = 0, \tag{53.2}$$

wobei wir $x^0 = ct$ verwenden. Daher ist

where we use $x^0 = ct$. Therefore

$$u^0 = u_0 = c, \quad u^\alpha = u_\alpha = 0, \quad x^\alpha = \text{const.} \tag{53.3}$$

Lösung der Bewegungsgleichung. Diese Koordinaten sind also mitbewegte Koordinaten. Die Eigenzeit stimmt für diese Massenpunkte mit der Zeit t überein, $\tau = t$. Wir werden diese Metrik verwenden, um den Kollaps eines Sterns aus Staubteilchen zu beschreiben. Darunter verstehen wir einen Stern, dessen Materie einen zu vernachlässigenden Druck hat. Zunächst müssen wir die C -Symbole und den R -Tensor bestimmen. Wir erhalten die nichtverschwindenden C -Symbole

are solutions of the equations of motion. These coordinates are comoving coordinates. The proper time agrees for these mass points with time t, $\tau = t$. We will use this metric in order to describe the collaps of a star consisting of dust perticles. By this one means a star whose matter has a negligible pressure. First we have to determine the C symbols and the R tensor. We obtain the following non vanishing C symbols

$$\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{rr} &= \frac{1}{2}\dot{B}, & \Gamma^r{}_{0r} &= \frac{\dot{B}}{2B}, \\
\Gamma^0{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\dot{C}, & \Gamma^\theta{}_{0\theta} &= \frac{\dot{C}}{2C}, \\
\Gamma^0{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}\dot{C}\sin^2\theta, & \Gamma^\phi{}_{0\phi} &= \frac{\dot{C}}{2C}, \\
\Gamma^r{}_{rr} &= \frac{B'}{2B}, \\
\Gamma^r{}_{\theta\theta} &= -\frac{C'}{2B}, & \Gamma^\theta{}_{r\theta} &= \frac{C'}{2C}, \\
\Gamma^r{}_{\phi\phi} &= -\sin^2\theta\frac{C'}{2B}, & \Gamma^\phi{}_{r\phi} &= \frac{C'}{2C}, \\
\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} &= \text{ctg}\theta
\end{aligned} \tag{53.4}$$

und hieraus die nicht verschwindenden Komponenten des R -Tensors

and from them the non vanishing components of the R tensor

$$R_{00} = \frac{\dot{B}^2}{4B^2} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{\dot{C}^2}{2C^2} - \frac{\ddot{C}}{C}, \tag{53.5}$$

$$R_{rr} = \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{4B} + \frac{C'^2}{2C^2} - \frac{C''}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{2C} + \frac{B'C'}{2BC}, \tag{53.6}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{\ddot{C}}{2} + \frac{B'C'}{4B^2} - \frac{C''}{2B} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{4B}, \tag{53.7}$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta, \tag{53.8}$$

$$R_{0r} = \frac{C'\dot{C}}{2C^2} - \frac{\dot{C}'}{C} + \frac{\dot{B}C'}{2BC}. \tag{53.9}$$

53.b Gravitationskollaps

Wir wollen nun den Gravitations-Kollaps an einem vereinfachten Modell untersuchen. Wir nehmen an, dass System besteht aus Staub einer Dichte $\mu(t)$, die nur von der Zeit abhängt und deren Druck gegen den Gravitationsdruck vernachlässigbar sei. Dann erhalten wir für den Energie-Impuls-Tensor

53.b Gravitational Collapse

We will now consider the gravitational collapse in a simplified model. We assume that the system consists of dust of density $\mu(t)$ which depends only on time and whose pressure is negligible in comparison to the gravitational pressure. Then we obtain for the energy-momentum tensor

$$T_{\kappa\nu} = \mu u_\kappa u_\nu = \mu c^2 \delta_\kappa{}^0 \delta_\nu{}^0 \tag{53.10}$$

und

and

$$(T_{\kappa\nu} - \frac{1}{2}g_{\kappa\nu}T) = \frac{1}{2}\mathrm{diag}(\mu c^2, B\mu c^2, C\mu c^2, C\mu c^2\sin^2\theta), \tag{53.11}$$

so dass die E -Gleichungen

so that the E equations read

$$\frac{\dot{B}^2}{4B^2} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{\dot{C}^2}{2C^2} - \frac{\ddot{C}}{C} = \frac{4\pi k_\mathrm{N}\mu}{c^2}, \tag{53.12}$$

$$\frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{4B} + \frac{C'^2}{2C^2} - \frac{C''}{C} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{2C} + \frac{B'C'}{2BC} = \frac{4\pi k_\mathrm{N}}{c^2}\mu B, \tag{53.13}$$

$$1 + \frac{\ddot{C}}{2} + \frac{B'C'}{4B^2} - \frac{C''}{2B} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{4B} = \frac{4\pi k_\mathrm{N}}{c^2}\mu C, \tag{53.14}$$

$$\frac{C'\dot{C}}{2C^2} - \frac{\dot{C}'}{C} + \frac{\dot{B}C'}{2BC} = 0 \tag{53.15}$$

lauten. Die Struktur der Gleichungen legt nahe, die Lösung mit einem Separationsansatz zu versuchen

. The structure of the equations suggests to try a separation ansatz

$$B(r,t) = a^2(t)f(r), \quad C(r,t) = s^2(t)g(r). \tag{53.16}$$

Wir erhalten dann zunächst

We obtain first

$$R_{0r} = \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{s}}{s}\right)\frac{g'}{g} = 0. \tag{53.17}$$

Daraus folgt $s(t) = \mathrm{const}\, a(t)$. Den konstanten Faktor können wir auch in die Funktion $g(r)$ ziehen. Wir setzen daher

From this equation follows $s(t) = \mathrm{const}\, a(t)$. The constant factor can be put into the function $g(r)$. Thus we set

$$s(t) = a(t). \tag{53.18}$$

Die Gleichungen für R_{rr} und $R_{\theta\theta}$ lassen sich auf die Form

The equations for R_{rr} and $R_{\theta\theta}$ can be brought into the form

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - \frac{4\pi k_\mathrm{N}\mu a^2}{c^2} = -\frac{g'^2}{2g^2 f} + \frac{g''}{gf} - \frac{f'g'}{2f^2 g} \tag{53.19}$$

$$= -\frac{1}{g} - \frac{g'f'}{4gf^2} + \frac{g''}{2fg} \tag{53.20}$$

bringen. Die linke Seite hängt nur von t ab, die rechte nur von r. Wir setzen die Ausdrücke daher gleich einer Konstanten $-2k$. Wir beobachten noch, dass wir frei in der Wahl von r sind oder anders ausgedrückt, wir sind frei, die Funktion $g(r)$ zu wählen. Wir wählen $g(r) = r^2$ und erhalten damit die drei Gleichungen

. The left hand-side depends only on t, the right hand-side only on r. Thus we equate the expressions with a constant $-2k$. We also observe that we are free in the choice of the variable or expressed alternatively we are free in choosing the function $g(r)$. We choose $g(r) = r^2$ and obtain the equations

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - \frac{4\pi k_N \mu a^2}{c^2} = -2k, \tag{53.21}$$

$$-\frac{f'}{rf^2} = -2k, \tag{53.22}$$

$$-\frac{1}{r^2} - \frac{f'}{2rf^2} + \frac{1}{fr^2} = -2k. \tag{53.23}$$

Die zweite und dritte Gleichungen hat die Lösung

The second and the third equations have the solution

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2}. \tag{53.24}$$

Die Lösung der zweiten Gleichung ergibt $f(r) = 1/(\hat{c} - kr^2)$ mit der Konstanten $\hat{c}$. Die dritte Gleichung erfordert dann $\hat{c} = 1$. Damit wird das Linienelement innerhalb der Dichteverteilung

The solution of the second equation yields $f(r) = 1/(\hat{c} - kr^2)$ with the constant $\hat{c}$. Then the third equation requires $\hat{c} = 1$. Then the line element within the density distribution reads

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)\right). \tag{53.25}$$

Wir betrachten r als dimensionslos und $a(t)$ als eine Länge. Die Staubpartikel bewegen sich auf Linien konstanten rs, aber der Abstand zwischen diesen Partikeln ist proportional zu $a(t)$. Zu lösen bleiben noch die Gleichung (53.21) und die Gleichung für R_{00},

We consider r dimensionless and $a(t)$ as length. The dust perticles move along lines of constant r, but the distance between these particles is proportional to $a(t)$. There remains equation (53.21) to be solved and the equation for R_{00},

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi k_N \mu}{c^2}. \tag{53.26}$$

Etwas bequemer ist es, wenn wir von

It is more comfortable if we start from

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}T^{0\nu}\right) + \Gamma^0_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{53.27}$$

ausgehen. Da nur T^{00} von Null verschieden ist und $\Gamma^0{}_{00} = 0$, verschwindet der letzte Term, woraus

. Since only T^{00} is different from zero and $\Gamma^0{}_{00} = 0$, the last term vanishes, which yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{-g}\mu) = 0 \tag{53.28}$$

folgt. Nun ist

. Now we have

$$\sqrt{-g} = ca(t)^3\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{53.29}$$

Da in diesem Ausdruck nur $a(t)$ von der Zeit abhängt, folgt

Since in this expression only $a(t)$ depends on time, we obtain

$$M = \frac{4\pi}{3}\mu(t)a^3(t) = \text{const.} \tag{53.30}$$

Diese Gleichung drückt die Massenerhaltung aus. Tatsächlich ist dies nicht die Masse, da zu deren Berechnung noch der Faktor $1/\sqrt{1 - kr^2}$ in $\sqrt{-g}$ berücksichtigt werden müsste. Setzen wir den Ausdruck für μ in die Gleichung (53.26) ein, so folgt

This equation expresses the conservation of mass. In fact this is not the mass since for its calculation one had to take into account the factor $1/\sqrt{1 - kr^2}$ in $\sqrt{-g}$. If we insert the expression for μ into equation (53.26), then we obtain

$$\ddot{a} = -\frac{k_N M}{a^2 c^2}. \tag{53.31}$$

Setzen wir das wieder in Gleichung (53.21) ein, so finden wir

If we insert this into equation (53.21) then we obtain

$$\dot{a}^2 - \frac{2k_N M}{ac^2} = -k. \tag{53.32}$$

Man kann sich durch Differenzieren nach der Zeit davon überzeugen, dass dann auch die vorhergehende Gleichung erfüllt ist. Man kann die letzte Gleichung als Energie-Erhaltung interpretieren. Nach Multiplikation mit einem geeigneten Massen-Faktor stellt der erste Term die kinetische, der zweite die potentielle Energie dar. Wählen wir als Anfangs-Bedingung $\dot{a}(t)|_{t=0} = 0$, so lässt sich die Lösung in Parameter-Darstellung angeben,

One can convince oneself by differentiating with respect to time that the preceding equation is fulfilled, too. The last equation can be interpreted as conservation of energy. After multiplication by an appropriate mass factor the first term represents the kinetic, the second one the potential energy. If we choose the initial condition $\dot{a}(t)|_{t=0} = 0$, then the solution can be given in parameter representation

$$t = \frac{a(0)}{2c\sqrt{k}}(\psi + \sin\psi), \quad a(t) = \frac{a(0)}{2}(1 + \cos\psi) \tag{53.33}$$

mit Anfangswert $\psi = 0$. Der Stern ist vollständig kollabiert, $a(t) = 0$ für $\psi = \pi$, das heißt nach der Zeit

with initial value $\psi = 0$. The star is completely collapsed for $\psi = \pi$, that is after the time

$$t = \frac{c\pi}{\sqrt{k_N M}}\left(\frac{a(0)}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 k_N \mu(0)}}. \tag{53.34}$$

In dem von uns gewählten Koordinatensystem, in dem t die Eigenzeit des Staubes ist, ist der Stern, der der Gravitation keinen Druck entgegensetzt, zum Punkt kollabiert. Ein Beobachter, der den Kollaps aus sicherer Entfernung beobachtet, würde allerdings nur sehen, dass der Stern am S -Radius immer langsamer (russisch: gefrorener Stern) und dunkler (schwarzes Loch) wird. Tatsächlich setzt Materie der Gravitation Druck entgegen, so dass nur hinreichend schwere und kalte Sterne einen Kollaps zum schwarzen Loch erleiden.

In the coordinate system we have chosen, in which t is the proper time of the dust, the star which does not oppose any pressure to gravitation, has collapsed to a point. An observer who watches the collapse at a safe distance would see, however, that the star becomes at the S radius slower and slower (Russian: frozen star) and darker (black hole). In reality matter opposes pressure against gravitation, so that only sufficiently massive and cold stars undergo a collapse to a black hole.