O

Kosmologie

Cosmology

54 Robertson-Walker Metrik

54.a Kosmologisches Prinzip

Die heutige astrophysikalische Vorstellung des Kosmos beruht auf der Annahme, dass der Kosmos großräumig gesehen homogen und isotrop ist. Man nimmt also an, dass über große Räume die Dichte im Universum homogen ist und dass keine Richtung des Universums ausgezeichnet ist. Dies schließt die Annahme ein, dass der Raum unbegrenzt ist. Das heißt nicht, dass er unendlich sein muss. Das bedeutet, dass die Milchstraße, in der wir uns befinden, gegenüber anderen Galaxien nicht ausgezeichnet ist. Insgesamt geht man von einer großräumigen Gleichverteilung der Galaxien aus. Hierbei geht man davon aus, dass die annähernd konstante Dichte für dreidimensionale Räume gilt, denen man gleiche Zeit $x^0 = ct$ zuordnet. Von dieser Zeit dürfen die räumlichen Abstände abhängen. Hierzu führt man eine Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 + g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = c^2\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\hat{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\right) \quad (54.1)$$

ein, wobei die $\hat{g}_{\alpha\beta}$ nur von den räumlichen Koordinaten x^α abhängen dürfen. Die Zeitabhängigkeit steckt allein in der Funktion $a(t)$. Man bezeichnet $a(t)$ als kosmologischen Skalenfaktor.

54 Robertson-Walker Metric

54.a Cosmological Principle

Our present astrophysical understanding of the universe is based on the assumption that on a large scale the universe is homogeneous and isotropic. Thus one assumes that over large distances the density is homogeneous and no direction in the universe is preferred. This includes the assumption that the space is unbounded. This does not mean that it has to be infinite. The homogeneity implies that our galaxy the milky way, is not preferred with respect to other galaxies. In total one assumes an equal distribution of galaxies at large distances. One assumes that there is an approximately constant density in three-dimesional spaces at equal times $x^0 = ct$. Spatial distances may depend on this time. We introduce the metric

where the $\hat{g}_{\alpha\beta}$ depend only on the spatial coordinates x^α. The time dependence is only plugged in the function $a(t)$. This $a(t)$ is called cosmological scale factor.

54.b Homogener isotroper Raum

Aus der Forderung nach der Isotropie und Homogenität des Raumes folgern wir, dass der Krümmungstensor $R^{(3)}$, den man etwa aus (41.12) erhält, wenn man die Beiträge mit den Indizes 0 weglässt, diese Isotropie und Homogenität widerspiegelt. Auf Grund der Symmetrie von R folgt, dass

54.b Homogeneous Isotropic Space

We infer from the requirement of isotropy and homogeneity of space that the curvature tensor $R^{(3)}$, which can be obtained from (41.12), if one leaves aside the contributions with indices 0, reflects the isotropy and homogeneity. From the symmetry of R it follows that

$$R^{(3)}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\kappa^{(3)}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) = -\kappa^{(3)}a^4(t)(\hat{g}_{\alpha\gamma}\hat{g}_{\beta\delta} - \hat{g}_{\alpha\delta}\hat{g}_{\beta\gamma}) \quad (54.2)$$

gelten soll. Tatsächlich haben wir bereits solch eine Metrik kennengelernt, ohne dass uns ihre Symmetrie vollständig bewusst wurde. Wir fanden sie als innere S -Metrik eines Raumes, der mit Masse konstanter Dichte erfüllt ist (53.25),

should hold. In fact we alredy got known such a metric, probably without being aware of its full symmetry. We found it as the interior S metric of the space filled with matter of constant density (53.25),

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)\right). \tag{54.3}$$

Diese Metrik heißt R -W -Metrik. Bezüglich des Ursprungs wurde die Metrik von vornherein isotrop angesetzt. Tatsächlich ist sie auch homogen. Eine Homogenität hatten wir insoweit als $R_{\alpha\beta} \propto g_{\alpha\beta}$ angesetzt war. Durch Auswerten finden wir, dass (54.2) für diese Metrik erfüllt ist mit

This metric is called R -W metric. The metric was constructed isotropic with respect to the origin. However it is also homogeneous. We had a homogeneity insofar as we required $R_{\alpha\beta} \propto g_{\alpha\beta}$. By evaluation we find that (54.2) is fulfilled for this metric with

$$\kappa^{(3)} = \frac{k}{a^2(t)}. \tag{54.4}$$

$\kappa^{(3)}$ ist die innere Krümmung des dreidimensionalen Raums mit t = const. Die zusätzliche Bedingung $g_{0\alpha} = 0$, $g_{00} = 1$ ergibt die C -Symbole

$\kappa^{(3)}$ is an internal curvature of the three-dimensional space with t = const. The additional condition $g_{0\alpha} = 0$, $g_{00} = 1$ yields the C symbols

$$\Gamma^0{}_{\alpha\beta} = -\frac{\dot a}{a}g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha{}_{0\beta} = \frac{\dot a}{a}\delta^\alpha{}_\beta, \tag{54.5}$$

$$\Gamma^0{}_{0\alpha} = \Gamma^\alpha{}_{00} = \Gamma^0{}_{00} = 0. \tag{54.6}$$

Damit erhält man

Thus we obtain

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\kappa(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \qquad \kappa = \kappa^{(3)} + \frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{k+\dot a^2}{a^2} \tag{54.7}$$

$$R_{\alpha0\gamma0} = -\kappa^{(0)}g_{\alpha\gamma}, \qquad \kappa^{(0)} = \frac{\ddot a}{a} \tag{54.8}$$

Die Komponenten des Krümmungstensors mit ein, drei oder vier Indizes 0 verschwinden. Daraus folgt der R -Tensor

The components of the curvature tensor with one, three or four indices 0 vanish. This we obtain the R tensor

$$R_{00} = -\frac{3\ddot a}{a}, \tag{54.9}$$

$$R_{0\alpha} = 0, \tag{54.10}$$

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{a\ddot a + 2\dot a^2 + 2k}{a^2}g_{\alpha\beta}. \tag{54.11}$$

Offensichtlich sind die Beziehungen (54.2) und (54.7 - 54.11) invariant gegen alle Transformationen der Raumkoordinaten x^α. Das schließt Homogenität und Isotropie ein.

Obviously the relations (54.2) and (54.7) are invariant against all transformations of the space coordinates x^α. This includes homogeneity and isotropy.

Ein anderes Verfahren, einen homogenen isotropen Raum zu finden, besteht darin, die dreidimensionale Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel zu betrachten. Wir können sie durch

Another procedure to find a homogeneous isotropic space consists in starting from the three-dimensional surface of a four-dimensional sphere. We may describe it by

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2 \tag{54.12}$$

beschreiben. Eliminieren wir x^4 und betrachten wir x^1, x^2, x^3 als die drei räumlichen Koordinaten, so folgt

. If we eliminate x^4 and consider x^1, x^2, x^3 as the three spatial coordinates, then it follows that

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 + (\mathrm{d}x^4)^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 + \frac{(x^1\mathrm{d}x^1 + x^2\mathrm{d}x^2 + x^3\mathrm{d}x^3)^2}{a^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}. \tag{54.13}$$

Offensichtlich ist dieser Raum isotrop und homogen. Eine orthogonale Transformation führt die vierdimensionale Kugel in sich über, wobei man diese so wählen kann, so dass der Pol $(\mathbf{0}, 1)$ in einen beliebigen anderen Punkt $(\mathbf{b}, \pm\sqrt{1-\mathbf{b}^2})$ ohne Änderung der Metrik übergeht (Homogenität),

. This space is obviously isotropic and homogeneous. An orthogonal transformation thransforms the four-dimensional sphere into itself. One may choose the transformation so that the pole $(\mathbf{0}, 1)$ is transformed into an arbitrary point $(\mathbf{b}, \pm\sqrt{1-\mathbf{b}^2})$ without a change in the metric (homogeneity)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{b}\left(\sqrt{1-k\mathbf{x}^2} - (1-\sqrt{1-k\mathbf{b}^2})\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\right)\right) \tag{54.14}$$

und dass man von dort aus auch die Richtungen der Änderungen $\mathrm{d}x^1$ ... $\mathrm{d}x^3$ beliebig wählen kann vorausgesetzt die Winkel zwischen den Richtungen bleiben erhalten (Isotropie). Mit

and so that the directions of the changes $\mathrm{d}x^1$ to $\mathrm{d}x^3$ can be chosen arbitrarily provided the angles between these directions are conserved (isotropy). With

$$x^1 = ar\sin\theta\cos\phi, \quad x^2 = ar\sin\theta\sin\phi, \quad x^3 = ar\cos\theta \tag{54.15}$$

erhält man dann

one obtains

$$\mathrm{d}l^2 = a^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{54.16}$$

in Übereinstimmung mit der R -W - Metrik für $k = 1$.

in agreement with the R -W metric for $k = 1$.

Die Wahl von k ist abgesehen vom Vorzeichen nur eine Frage der Skala. Man unterscheidet daher die drei Fälle $k = +1$, $k = 0$ und $k = -1$. Die Längenskala wird durch den kosmischen Skalenfaktor $a(t)$ gegeben.

The choice of k is apart from its sign a matter of the scale. One distinguishes the three cases $k = +1$, $k = 0$, and $k = -1$. The length scale is given by the cosmic scale factor $a(t)$.

Für $k = 1$ erhält man einen endlichen Raum, für $k = 0$ haben wir natürlich einen ebenen Raum, für $k = -1$ den Raum der nicht-euklidischen Geometrie. Dieser lässt sich nicht einfach in einen ebenen Raum, dessen Dimension um eins erhöht ist, einbetten. Vielfach führt man für r die Parametrisierung

One obtains a finite space for $k = 1$, for $k = 0$ the space is obviously flat, and for $k = -1$ one obtains the space of non-euclidean geometry. This last space cannot simply be imbedded in a flat space, whose dimension is increased by one. Often one introduces for r the parametrization

$$r = \sinh\chi, \quad k = -1, \tag{54.17}$$
$$r = \chi, \quad k = 0, \tag{54.18}$$
$$r = \sin\chi, \quad k = 1 \tag{54.19}$$

ein. Das Linienelement lautet dann

. Then the line-element reads

$$\mathrm{d}l^2 = a^2(t)\left(\mathrm{d}\chi^2 + r(\chi)^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right). \tag{54.20}$$

Für $k = -1$ und $k = 0$ ist der Raum offen und unendlich, für $k = 1$ ist der Raum geschlossen und endlich. In diesem Fall läuft χ von 0 bis π. Das Volumen dieses endlichen Raums ergibt sich zu

For $k = -1$ and $k = 0$ the space is open and infinite, for $k = 1$ it is closed and finite. In this case χ runs from 0 to π. The volume of this space is given by

$$V = a^3\int_0^\pi \mathrm{d}\chi sin^2\chi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = a^3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot 2\pi = 2\pi^2a^3. \tag{54.21}$$

Der Radius einer Kugel mit Zentrum bei $\chi = 0$ ist durch $R = a\chi$ gegeben. Seine Oberfläche ist

The radius of a sphere with center at $\chi = 0$ is given by $R = a\chi$. Its surface is

$$O = \left\{\begin{array}{cc} 4\pi a^2\sinh^2(R/a) & k=-1, \\ 4\pi a^2 & k=0, \\ 4\pi a^2\sin^2(R/a) & k=+1 \end{array}\right\} = 4\pi R^2 - k\frac{R^4}{3a^2} + ... \tag{54.22}$$

Sie ist daher für $k = -1$ größer und für $k = +1$ kleiner als für die flache Metrik. Ähnlich ist auch das Volumen einer Kugel vom Radius R für $k = -1$ größer und für $k = +1$ kleiner als im E ischen Fall.

Thus it is larger for $k = -1$ and smaller for $k = +1$ than for the flat metric. Similarly the volume of a sphere of Radius R is larger for $k = -1$ and smaller for $k = +1$ then in the E ean case.

54.c Rotverschiebung, Horizont

54.c Red Shift, Horizon

Wir gehen davon aus, dass für die Bewegung von Sternen bzw. Galaxien in guter Näherung χ = const. gilt. Wir sind daran interessiert, zu welcher Zeit t_e das Licht, das jetzt bei uns eintrifft, den Stern verlassen hat. Wir nehmen unseren Ort im Universum mit $\chi_0 = 0$ an. Geodäten durch diesen Ort verlaufen auf konstantem θ und ϕ. Wir erhalten aus $\mathrm{d}s^2 = 0$ für das χ, das das Licht von der Zeit t_e der Ausstrahlung bis zur Zeit t_0 des Empfangs durchlaufen hat,

We act on the assumption that for the motion of stars and galaxies we have in good approximation χ = const. We are interested to know at which time t_e the light which we now observe has left the star. We assume that our location in the universe is $\chi = 0$. Then geodesics through this point run along constant θ and ϕ. From $\mathrm{d}s^2 = 0$ we obtain for the χ from which the light at t_0 has been emitted and at time t_a has arrived

$$c\mathrm{d}t = a(t)\mathrm{d}\chi, \to \chi = \int_{t_\mathrm{e}}^{t_0} \frac{c\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{54.23}$$

Gehen wir mit der Zeit der Aussendung zurück bis zum Zeitpunkt $t = 0$, zu dem sich der Kosmos aus einer punktförmigen Singularität entwickelt hat, so finden wir, dass das maximale χ, von dem wir Licht (Information) erhalten können, durch

If we go backward with the emission to the time $t = 0$ at which the universe started to evolve from a point-like singularity, then we find that the maximal χ from which we can obtain light (information) is given by

$$\chi_\mathrm{max} = \int_0^{t_0} \frac{c\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{54.24}$$

gegeben ist. Man bezeichnet dies als den Horizont. Weiter kann man gegenwärtig nicht sehen.

. This is called the horizon. Presently it is not possible to see further.

Die Rotverschiebung erhalten wir dadurch, dass wir die Zeiten zweier aufeinander folgender Wellenberge, die vom gleichen Ort an den gleichen Ort gelangen, vergleichen. Man hat

The red shift is obtained by comparing the times at which two consecutive maxima of a wave runs from one location to another. One has

$$\chi = \int_{t_\mathrm{e}}^{t_0} \frac{c\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_{t_\mathrm{e}+\delta_\mathrm{e}}^{t_0+\delta_0} \frac{c\mathrm{d}t}{a(t)} = \chi = \int_{t_\mathrm{e}}^{t_0} \frac{c\mathrm{d}t}{a(t)} + \frac{c\delta_\mathrm{e}}{a(t_\mathrm{e})} - \frac{c\delta_0}{a(t_0)}. \tag{54.25}$$

Daher ist

Thus we have

$$\frac{\delta_\mathrm{e}}{a(t_\mathrm{e})} = \frac{\delta_0}{a(t_0)}, \tag{54.26}$$

oder da die Zeitdifferenz umgekehrt proportional zur Frequenz ω ist,

or since the time difference is reciprocal to the frequency ω,

$$\omega_\mathrm{e} a(t_\mathrm{e}) = \omega_0 a(t_0). \tag{54.27}$$

Die kosmische Rotverschiebung ergibt sich daher zu

Thus the cosmological red-shift is given by

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_\mathrm{e})} - 1. \tag{54.28}$$

Weiter betrachten wir die Bewegung eines freien Massenpunkts. Auch hier nehmen wir an, dass er sich längs konstanten θ und ϕ bewegt. Wir erhalten dann die Bewegungsgleichungen für die Geodäten (39.17)

Further we consider the motion of a free mass point. Again we assume that it runs along constant θ and ϕ. We obtain the equations of motion for the geodesic lines (39.17)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^0{}_{\chi\chi}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -\frac{\mathrm{d}a}{c\mathrm{d}t}a\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \tag{54.29}$$

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} \quad = \quad -2\Gamma^{\chi}{}_{0\chi}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{2}{a}\frac{da}{cdt}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d\chi}{d\tau}. \tag{54.30}$$

Man beachte, dass damals der Punkt für die Ableitung nach τ stand, jetzt aber für die Ableitung nach ct. Mit

Note that at that time the dot indicated the derivative with respect to τ, but now it stands for the derivative with respect to ct. With

$$\frac{dx^0}{cd\tau} = \gamma, \quad a\frac{d\chi}{cd\tau} = \beta\gamma \tag{54.31}$$

folgt aus der ersten der beiden Bewegungsgleichungen

we obtain from the first of both equations of motion

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{da}{d\tau}\frac{1}{a\gamma}\beta^2\gamma^2. \tag{54.32}$$

Mit $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$ folgt

With $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$ we obtain

$$\frac{\gamma d\gamma}{\gamma^2 - 1} = -\frac{da}{a}, \tag{54.33}$$

was nach Integration

which yields after integration

$$\frac{1}{2}\ln(\gamma^2 - 1) = \text{const.} - \ln a \tag{54.34}$$

ergibt, woraus schließlich

from which we obtain

$$c\beta\gamma a = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}a = \text{const.} \tag{54.35}$$

folgt. Der Impuls eines Masseteilchens nimmt umgekehrt proportional zur Ausdehnung $a(t)$ ab, was auch in Übereinstimmung mit der Rotverschiebung des Lichts ist.

The momentum of a mass particle decreases inversely proportional to the cosmological scale factor $a(t)$, which is in agreement with the red-shift of light.

54.d Kosmische Hintergrundstrahlung

54.d Cosmic Microwave Background Radiation

Ab einem bestimmten Zeitpunkt in der Entwicklung des Kosmos wurde die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie so schwach, dass sich die Temperatur der Strahlung unabhängig von der Materie entwickelte. Die Dichte der Photonen (Anzahl pro Volumen und Frequenz) sei gegeben durch die P sche Verteilung

At a certain time in the evolution of the universe the interaction between matter and radiation became so weak that the temperature of the radiation started to develop independently of that of matter. The density of photons (number per volume and frequency) is given by P 's distribution law

$$n(\omega_e, t_e) = \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\omega_e^2}{e^{\hbar\omega_e/(k_B T_e)} - 1}. \tag{54.36}$$

Zu einer späteren Zeit t ist

At a later time t one has

$$\omega = \omega_e\frac{a(t_e)}{a(t)}. \tag{54.37}$$

Da der Raum expandiert hat, gilt

Since the space expands

$$n(\omega_e, t_e)d\omega_e a^3(t_e)\sqrt{-\hat{g}} = n(\omega, t)d\omega a^3(t)\sqrt{-\hat{g}}. \tag{54.38}$$

Damit folgt

Thus one obtains

$$n(\omega, t) = \frac{a^2(t_e)}{a^2(t)}n(\frac{a(t)}{a(t_e)}\omega, t_e) = \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega a(t)/(k_B T_e a(t_e))} - 1}. \tag{54.39}$$

Dies ist jedoch die Schwarzkörperstrahlung zur Temperatur

$$T(t) = \frac{a(t_e)}{a(t)} T(t_e). \tag{54.40}$$

Daher nimmt die Strahlungstemperatur umgekehrt proportional zur Ausdehnung des Universums ab. Heute beobachtet man eine Hintergrundstrahlung $T(t_0) = 2.7$ K. Die Strahlung zeigt eine leichte dipolare Anisotropie, aus der man schließen kann, dass wir uns mit einer Geschwindigkeit $a\dot{\chi}$ von etwa 600 km/s gegen diese Mikrowellenstrahlung bewegen. Wir können also eine absolute Geschwindigkeit des Sonnensystems im Weltall angeben.

This, however, is the black-body radiation at temperature

Thus the radiation temperature decreases inversely proportional to the extension of the universe. Today one observes a background radiation of temperature $T(t_0) = 2.7$ K. The radiation shows a weak dipolar anisotropy, from which we can conclude, that we move with a velocity $a\dot{\chi}$ of appr. 600 km/s against this blackground radiation. Thus we are able to determine an absolute velocity of the solar system in the universe.

55 Weltmodelle

55 World Models

55.a FRIEDMANN-Modell

55.a FRIEDMANN Model

Wir betrachten nun das Standard-Weltmodell, in dem wir die E schen Gleichungen für ein homogenes Universum aufstellen. In (54.9-54.11) hatten wir den R -Tensor für die R -W - Metrik angegeben

Now we consider the standard world model in setting up E 's equations for a homogeneous universe. In eqs. (54.9-54.11) we gave the R tensor for the R -Walker metric

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{0\alpha} = 0, \quad R_{\alpha\beta} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} g_{\alpha\beta}. \tag{55.1}$$

Der Energie-Impuls-Tensor hat für im Mittel ruhende Materie die Form

The energy-momentum tensor for matter being at rest in the average reads

$$T_{00} = \mu c^2, \quad T_{0\alpha} = 0, \quad T_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} P. \tag{55.2}$$

mit der Spur

with the trace

$$T = T^\lambda{}_\lambda = \mu c^2 - 3P. \tag{55.3}$$

Aus den Feldgleichungen (43.8)[1]folgt dann unter Einschluss der kosmologischen Konstante,

From the field equations (43.8)[1]one obtains by including the cosmological constant

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k_N}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) + g_{\mu\nu}\Lambda. \tag{55.4}$$

Daraus erhält man die beiden Bewegungsgleichungen

Hence one obtains the two equations of motion

$$3\ddot{a} - \Lambda a = -\frac{4\pi k_N}{c^4}(\mu c^2 + 3P)a, \tag{55.5}$$

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k - \Lambda a^2 = \frac{4\pi k_N}{c^4}(\mu c^2 - P)a^2. \tag{55.6}$$

Eliminieren wir $\ddot{a}$, so folgt

Eliminating $\ddot{a}$ one obtains

$$\dot{a}^2 + k - \frac{1}{3}\Lambda a^2 = \frac{8\pi k_N}{3c^2}\mu a^2, \tag{55.7}$$

Differenzieren wir diese Gleichung und ziehen wir $2\dot{a}/3$ der Gleichung (55.5) ab, so erhalten wir

If we differentiate this equation and subtract $2\dot{a}/3$ times the equation (55.5), then we obtain

$$\dot{\mu} = -\frac{3\dot{a}}{a}\left(\mu + \frac{P}{c^2}\right). \tag{55.8}$$

Zur Lösung dieser Gleichung bedarf es noch einer Zustandsgleichung $P(\mu)$. Hierfür macht man zwei Ansätze:
a) $P = 0$. Dieser Ansatz setzt nicht relativistische Teilchen voraus. Er ist gut für die Materie unseres heutigen Universums.
b) $P = \mu c^2/3$. Dies gilt für hochrelativistische Teilchen und elektromagnetische Strahlung und ist dem frühen Universum angemessen.

In order to solve this equation we need an equation of state $P(\mu)$. For this purpose we follow two approaches:
a) $P = 0$. This ansatz assumes non-relativistic particles. It is valid for the matter of our present universe.
b) $P = \mu c^2/3$. This applies for highly relativistic particles and electromagnetic radiation and is appropriate for the early universe.

[1]Die Konstante wurde dort leider ursprünglich mit dem falschen Vorzeichen angegeben (inzwischen korrigiert)

There the constant had been introduced originally with the wrong sign (meanwhile corrected)

Mit dem ersten Ansatz erhält man wie bereits in (53.30)

With the first approach we obtain as in (53.30)

$$\mu_{\mathrm{m}}(t)a^3(t) = \text{const.} = \mu_{\mathrm{m}0}a_0^3 \tag{55.9}$$

Mit dem zweiten Ansatz folgt

The second approach yields

$$\mu_{\mathrm{r}}(t)a^4(t) = \text{const.} = \mu_{\mathrm{r}0}a_0^4 \tag{55.10}$$

Man nimmt vielfach an, man kann beide Anteile separat konstant halten. Das gilt, wenn Materie und Strahlung nicht wechselwirken oder wenn einer der beiden Beiträge dominiert. Dann kann Gl. (55.7) auf die Form

One often assumes that both contributuions can be kept constant separately. This holds, if matter and radiation do not interact or when one of these contributions dominates. Then eq. (55.7) can be written

$$\dot{a}^2 + V(a) = -k \tag{55.11}$$

mit dem effektiven Potential

with the effective potential

$$V(a) = -\frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{3c^2}\frac{\mu_{\mathrm{m}0}a_0^3}{a} - \frac{8\pi k_{\mathrm{N}}}{3c^2}\frac{\mu_{\mathrm{r}0}a_0^4}{a^2} - \frac{1}{3}\Lambda a^2 \tag{55.12}$$

gebracht werden. Die Gleichungen (55.11) und (55.12) beschreiben das F -Modell.

. The equations (55.11) and (55.12) describe the F model.

55.b Geschichte und Zukunft des Universums

55.b History and Future of the Universe

55.b.α Gegenwart

55.b.α Present State

Dies ist ein kurzer Versuch, Vergangenheit und Zukunft des Universums auf Grund heutiger Kenntnis zu beschreiben.
Zur Beschreibung geht man gerne auf dimensionslose Größen über. Hierzu verwendet man als kosmologische Längenskala den heutigen kosmologischen Skalenfaktor $a_0 = a(t_0)$ und führt

This is a short attempt to present a view on the history and the future of the universe on the basis of our present knowledge.
For the description one prefers to transform to dimensionless quantities. As cosmological length scale one uses the present cosmological scale factor $a_0 = a(t_0)$ and introduces

$$x = a(t)/a_0 \tag{55.13}$$

ein. Als Zeitskala dient die H -Konstante H_0,

. The time scale is given by the H constant H_0,

$$H_0 = c\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \tag{55.14}$$

(Der Punkt gibt die Ableitung nach $x^0 = ct$ an.) Würde $a(t)$ linear mit der Zeit anwachsen, so wäre $1/H_0$ die Zeit, die vergangen ist, seit der Kosmos aus einer Punktsingularität entstanden ist (Urknall). Die dimensionslose Zeiteinheit ist dann

(The dot indicates the derivative to $x^0 = ct$.) If $a(t)$ would increase linearly in time, then $1/H_0$ were the time, which had passed, since the universe started to develop from a point singularity (Big Bang). Then the dimensionless time unit is

$$\tau = H_0 t. \tag{55.15}$$

Der heutige Wert für die H -Konstante ist

The present value of H 's constant is

$$H_0 = (72 \pm 8)\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}, \quad \frac{1}{H_0} = (13.6 \pm 1.5) \cdot 10^9 \text{a}. \tag{55.16}$$

(1 Parsec (pc) ist der Abstand unter dem die große Halbachse der Erdbahn unter einem Winkel von 1 Bogensekunde erscheint, 1 pc = $3.1 \cdot 10^{16}$ cm = 3.26 Lichtjahre.) In diesen Einheiten lautet die F - Gleichung

(1 Parsec (pc) is the distance from which the large half-axis of the earth's orbit appears under 1 arc second, 1 pc =$3.1 \cdot 10^{16}$ cm = 3.26 light years.) In these units the F equation can be written

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_\mathrm{m}}{x} - \frac{\Omega_\mathrm{r}}{x^2} - \Omega_\Lambda x^2 = \Omega_k. \tag{55.17}$$

Da zur gegenwärtigen Zeit definitionsgemäß $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = 1$ ist, folgt

Since at present we have $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = 1$ according to the definition, we obtain

$$\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \tag{55.18}$$

mit

with

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{8\pi k_\mathrm{N}\mu_\mathrm{m0}}{3H_0^2} = \frac{\mu_\mathrm{m0}}{\mu_\mathrm{cr}}, \quad \Omega_\mathrm{r} = \frac{8\pi k_\mathrm{N}\mu_\mathrm{r0}}{3H_0^2} = \frac{\mu_\mathrm{r0}}{\mu_\mathrm{cr}}, \quad \mu_\mathrm{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi k_\mathrm{N}} \approx 0.93 \cdot 10^{-26}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \tag{55.19}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2}, \tag{55.20}$$

wobei μ_cr die kritische Dichte genannt wird.
Die Ableitung der Gleichung (55.17) ergibt

where μ_cr is called critical density.
The derivative of equation (55.17) yields

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\Omega_\mathrm{m}}{2x^2} - \frac{\Omega_\mathrm{r}}{x^3} + \Omega_\Lambda x. \tag{55.21}$$

Man schätzt heute

Today one estimates

$$\Omega_\mathrm{r} = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_\mathrm{m} = 0.29 \pm 0.07, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.7, \quad \Omega_k = 0.01 \pm 0.06. \tag{55.22}$$

Der Materie-Beitrag setzt sich aus baryonischer Materie und dunkler, das heißt nicht sichtbarer Materie zusammen

The material contribution is composed of baryonic matter and dark, that is invisible matter

$$\Omega_\mathrm{m} = \Omega_\mathrm{b} + \Omega_\mathrm{dm}, \quad \Omega_\mathrm{b} = 0.05 \pm 0.01. \tag{55.23}$$

Zur gegenwärtigen Zeit spielt der Strahlungsbeitrag Ω_r keine Rolle für die Dynamik des Universums, aber er liefert uns praktisch alle Information über das Universum. Zu hinreichend früher Zeit (kleines x) war er jedoch dominant. Der kleine Wert von Ω_k zeigt an, dass das Universum nahezu flach ist. Ob es wirklich flach ist ($k = 0$) oder k positiv oder negativ, lässt sich gegenwärtig nicht entscheiden. Rätselhaft ist auch der Ω_Λ-Beitrag. Er stammt von der kosmologischen Konstante E s. Jedoch ist nicht klar, wie seine Größe zustandekommt. Nach einer Überlegung will man ihn mit der Nullpunkts-Energie in Verbindung bringen. Dann müsste er aber um einen Faktor 10^{120} größer sein. Eine ganz andere Überlegung (W) bringt ihn mit einem weiteren Feld, der Quintessenz bzw. dem Kosmon in Verbindung, so dass Λ gar keine Konstante sein muss.

Presently the radiation contribution Ω_r plays nearly no role for the dynamics of the universe, but it yields practically all our information on the universe. At sufficiently early times (small x) it was dominant. The small value of Ω_k indicates, that the universe is nearly flat. Presently it cannot be decided, whether it is really flat ($k = 0$) or whether k is positive or negative. The Ω_Λ contribution is puzzling. It comes from E - s cosmological constant. The reason for its size is however not clear. One idea brings it in relation to the zero-point energy. Then, however, it had to be larger by a factor of 10^{120}. A quite different consideration (W) brings it in connection with a further field, the quintessence and the cosmon, resp., so that Λ need not be a constant.

55.b.β Vergangenheit

Fast alle Überlegungen zur Entwicklung des Universums kommen heute zum Ergebnis, dass das Universum mit dem Urknall entstanden ist. Gleichung (55.17) erlaubt uns das Weltalter zu berechnen,

55.b.β Past

Nearly all considerations on the development of the universe come to the conclusion that the universe started with the Big bang. Equation (55.17) allows the calculation of the age of the universe,

$$t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{dx/dt} = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m/x + \Omega_r/x^2 + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_k}} = \frac{0.964}{H_0} \approx 13\cdot 10^9 \mathrm{a}. \qquad (55.24)$$

Das Weltalter ist also etwas kleiner als die inverse H -Konstante.
Zur Diskussion der Vergangenheit setzen wir $\Omega_k = 0$, da es stets nur einen kleinen Beitrag liefert. In Abhängigkeit von x haben unterschiedliche Terme die Bewegungsgleichung dominiert. Für sehr frühe Zeit war das Universum strahlungs-dominiert,

Thus the age of the universe is slightly less than the inverse H constant.
In order to discuss the past we put $\Omega_k = 0$, since it contributes only a small amount at any time. Depending on x different terms dominate the equation of motion. At very early times the universe is radiation dominated,

$$t \le t_{rm} \approx \frac{1}{H_0}\int_0^{x_{rm}} dx \frac{dx}{\sqrt{\Omega_r/x^2}} = \frac{x_{rm}^2}{2H_0\sqrt{\Omega_r}}, \quad \frac{\Omega_r}{x_{rm}^2} = \frac{\Omega_m}{x_{rm}}, \quad t_{rm} \approx 3\cdot 10^4 \mathrm{a}, \quad x_{rm} \approx 1.7\cdot 10^{-4}. \qquad (55.25)$$

Zu sehr früher Zeit waren die Temperaturen extrem hoch. Bis zu einer Temperatur $k_B T \approx 2$GeV ($t \approx 10^{-4}$s) fand die Nukleon-Anti-Nukleon-Erzeugung statt. Bis zu Temperaturen von 1 MeV ($t \approx 2$s) wurden Elektron-Positron-Paare erzeugt. Bei $k_B T \sim 10...100$keV liefen Kernreaktionen ab. Es werden leichte Atomkerne gebildet: Deuterium, Helium, Lithium.
Der nächste Zeitabschnitt ist materie-dominiert bis

At very early times the temperatures were extremely large. Down to temperatures $k_B T \approx 2$GeV ($t \approx 10^{-4}$s) nucleon anti-nucleon pairs were generated. At temperatures of 1 MeV ($t \approx 2$s) electron-positron pairs were created. At temperatures of $k_B T \sim 10...100$keV nuclear reactions were running. Light atomic nuclei were produced: deuteron, helium, lithium.

The next time interval was matter-dominated until

$$t \le t_{m\Lambda} \approx \frac{1}{H_0}\int_0^{x_{m\Lambda}} dx \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m/x}} = \frac{2x_{m\Lambda}^{3/2}}{3H_0\sqrt{\Omega_m}}, \quad \frac{\Omega_m}{x_{m\Lambda}} = \Omega_\Lambda x_{m\Lambda}^2, \quad t_{m\Lambda} \approx 9\cdot 10^9 \mathrm{a}, \quad x_{m\Lambda} \approx 0.7. \qquad (55.26)$$

Zu der Zeit ($4\cdot 10^5 a$), als sich das Weltall auf etwa 3000 K abgekühlt hatte, trat eine Entkopplung von Strahlung und Materie ein. Seither ist das Universum transparent. Gegenwärtig tragen die Materie und der Λ-Term zur F -Gleichung vergleichbar bei.

At the time ($4\cdot 10^5 a$), when the universe had cooled down to approximately 3000 K, radiation and matter decoupled. Since then the universe is transparent. Presently the contributions of matter and of the Λ-term to the F equation are comparable.

55.b.γ Zukunft

Wir betrachten noch einmal die generelle Situation: Je nach den gegenwärtigen Werten der Ωs erhält man eine unterschiedliche Entwicklung des Universums. Da Ω_r zumindest heute vernachlässigbar ist, sind Ω_m, Ω_Λ und Ω_k die entscheidenden Größen. Ihre Summe ist eins. Daher haben J.P. Ostiker, T. Souradeep (Pramana 63 (2004) 817-828; astro-ph/0409131) diese drei Größen in einem 'kosmischen Dreieck' aufgetragen, das wir vereinfacht wiedergeben. Durch dieses Dreieck verlaufen drei wesentliche Linien:
a) Eine horizontale Linie bei $\Omega_k = 0$. Längs dieser Linie ist das Universum flach. Oberhalb ist es offen, unterhalb geschlossen.

55.b.γ Future

We consider again the general situation: Depending on the present values of the Ω's one obtains a different evolution of the universe. Since Ω_r is at least presently negligible, Ω_m, Ω_Λ, and Ω_k are the decisive quantitives. They add up to one. Thus J.P. Ostiker, T. Souradeep (Pramana 63 (2004) 817-828; astro-ph/0409131) have plotted these three quantities in a 'cosmic triangle', which we represent in a simplified manner. There are three essential lines transversing this triangle:
(i) The horizontal line at $\Omega_k = 0$. The universe is flat along this line. Above the line it is open, below it is closed.

b) Eine fast senkrechte Linie trennt den Bereich eines Universums, dessen Ausdehnung beschleunigt ist (rechts) von einem, dessen Ausdehnung gebremst ist (links). Tatsächlich beobachtet man ein Universum, dessen Ausdehnung sich beschleunigt, obwohl man auf Grund der Gravitation das Gegenteil erwarten würde. Dies liegt wesentlich am Λ-Beitrag. Gleichung (55.21) ergibt mit (55.22)

(ii) A nearly vertical line separates the region of the universe whose expansion rate is accelerating (right) from one that is decelerating (left). In reality one observes a universe whose expansion rate is accelerating, although one would expect the opposite from gravitation. This comes essentially from the Λ contribution. Equation (55.21) yields

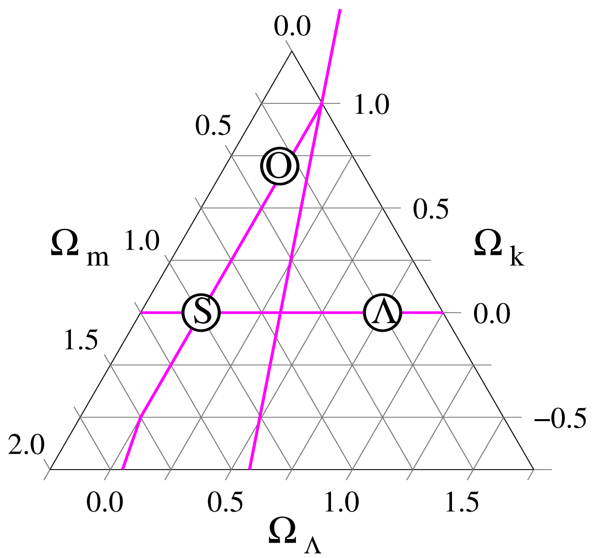
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \approx 0.55. \tag{55.27}$$

Diese Größe wird Beschleunigungsparameter genannt, sein negatives Verzögerungs-Parameter.

This quantity is called acceleration parameter, its negative deceleration parameter.

c) Schließlich trennt eine Linie ungefähr bei $\Omega_\Lambda = 0$ die Lösungen, die dazu führen werden, dass das Universum wieder zu einem Punkt kollabiert (links, Großer Endkollaps) von den Lösungen, die zu einem immer weiter expandierenden Universum (rechts) führen.

(iii) Finally a line approximately at $\Omega_\Lambda = 0$ separates the solutions which result in a universe which will finally collaps (left) into a point (Big Crunch) from the solutions which lead to an ever expanding universe (right).



Der mit Λ bezeichnete Kreis entspricht den Vorstellungen, die wir heute vom Universum haben. Die beiden anderen Kreise stehen für Universen, für die der kosmologische Term verschwindet, $\Lambda = 0$.

The circle denoted by Λ corresponds to the present conception of our universe. The two other circles correspond to universes with vanishing cosmological term, $\Lambda = 0$.

Falls der Λ-Parameter nicht zeitabhängig ist, wird auf Dauer das Universum exponentiell anwachsen, was aus

If the Λ parameter does not depend on time, then the universe will increase exponentially fast in the long run, which follows from

$$t = \frac{1}{H_0}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^2}} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\ln x, \quad x \propto \exp(H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}\, t) \tag{55.28}$$

folgt. Dieses Verhalten nennt man Vakuum-dominiert. Es gibt auch Hypothesen, dass dieser Term zur extremen Frühzeit ($t < 10^{-30}$s) des Universums dominiert hat (inflationäres Universum). Dadurch konnte aus einem kleinen homogenen und kausal verbundenen Gebiet ein homogenes, nicht kausal verbundenes Gebiet entstehen, was die Homogenität des uns sichtbaren Kosmos erklären kann.

. This behaviour is called vacuum-dominated. There is also the hypothesis that this term dominated at the extreme early time ($t < 10^{-30}$s) of the universe (inflationary universe). Thus a small homogeneous and causally connected region could develop into a homogeneous causally disconnected region, which explains the homogeneity of the visible universe.

56 Elektrodynamik in der RW Metrik

56 Electrodynamics in RW Metric

56.a Gleichungen der Elektrodynamik

56.a Equations of Electrodynamics

Die Gleichungen für das elektrodynamische Feld in Anwesenheit von Gravitationsfeldern erhält man durch Variation aus dem entsprechenden Anteil der Wirkung

The equations of the electromagnetic field in the presence of gravitational fields is obtained by the variation of the corresponding contribution of the action

$$I_{\mathrm{em}} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^{\mu}A_{\mu}\right) \tag{56.1}$$

mit

with

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \tag{56.2}$$

Die Variation bezüglich A ergibt

The variation with respect to A yields

$$\delta I_{\mathrm{em}} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\,\delta A_{\mu}\left(\frac{1}{4\pi}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}F^{\nu\mu}) - \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,j^{\mu}\right), \tag{56.3}$$

woraus die Gleichungen

from which the equations

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-g}F^{\nu\mu}) = \frac{4\pi}{c}\sqrt{-g}\,j^{\mu} \tag{56.4}$$

folgen. Da $F^{\nu\mu}$ antisymmetrisch in seinen Indizes ist, folgt, dass die Divergenz der linken Seite der obigen Gleichung verschwindet. Daher gilt für die rechte Seite

follow. Since $F^{\nu\mu}$ is antisymmetric in its indices, one finds, that the divergence on the left-hand side of the equation (56.4) vanishes. Thus one obtains for the right-hand side of the equation

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\,j^{\mu}) = \sqrt{-g}D_{\mu}j^{\mu} = 0. \tag{56.5}$$

Die Ladung muss also erhalten sein.

Thus the charge is conserved.

Wir wollen nun die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im homogenen isotropen Raum der R -W Metrik betrachten. Dabei interessiert uns, wie sich die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors a auswirkt. Zunächst bringen wir die Gleichung auf die Form

Now we will consider the propagation of electromagnetic waves in the homogeneous isotropic space of the R -W metric. Here we are mainly interested to see, how the result is affected by the time dependence of the cosmological scale a. At first we bring the equations into the form

$$\partial_{\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\kappa}g^{\mu\lambda}(\partial_{\kappa}A_{\lambda} - \partial_{\lambda}A_{\kappa})\right) = 0. \tag{56.6}$$

Wir verwenden

We use

$$g^{00} = 1, \quad g^{0\alpha} = 0, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{1}{a^2(t)}\hat{g}^{\alpha\beta}, \quad \sqrt{-g} = a^3(t)\sqrt{-\hat{g}} \tag{56.7}$$

und erhalten für $\mu = 0$ und $\mu = \gamma$ die Gleichungen

and obtain for $\mu = 0$ and $\mu = \gamma$ the equations

$$\partial_{\alpha}\left(\sqrt{-\hat{g}}g^{\alpha\beta}(\partial_{\beta}a(t)A_0 - a(t)\partial_0 A_{\beta})\right) = 0, \tag{56.8}$$

$$a(t)\partial_0\left(\sqrt{-\hat{g}}g^{\gamma\alpha}(a(t)\partial_0 A_{\alpha} - \partial_{\alpha}a(t)A_0)\right) + \partial_{\alpha}\left(\sqrt{-\hat{g}}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}(\partial_{\delta}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\delta})\right) = 0, \tag{56.9}$$

wobei wir die Faktoren $a(t)$ an geeignete Stellen geschrieben haben. Falls wir nun

where we have written the factors $a(t)$ at appropriate places. If we now write

$$a(t)\partial_0 = a_0 \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \tag{56.10}$$

mit der Lösung

with the solution

$$\hat{t}(t) = \int^t \frac{a_0 \mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{56.11}$$

schreiben, dann haben wir die Gleichungen für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen mit variablem $a(t)$ zurückgeführt auf die mit konstantem $a = a_0$, die mit $\hat{A}$ bezeichnet wird, so dass

then we have reduced the equations for the propagation of electro-magnetic waves with variable $a(t)$ to those with constant $a = a_0$, which we denote by $\hat{A}$, so that

$$A_0(t) = \frac{a_0}{a(t)} \hat{A}_0(\hat{t}(t)), \quad A_\alpha(t) = \hat{A}_\alpha(\hat{t}(t)), \tag{56.12}$$

gilt. Man hat also die gleichen Lösungen. Nur die Zeit t ist ersetzt durch $\hat{t}(t)$, was genau die Rot-Verschiebung ergibt und A_0 ändert sich um den Faktor $a_0/a(t)$.

holds. Thus one has the same solution. Only time t has to be replaced by $\hat{t}(t)$, which yields precisely the red-shift, and A_0 changes by the factor $a_0/a(t)$.

56.b Energie des Felds

56.b Energy of the Field

In (43.13) hatten wir den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Felds bestimmt

In (43.13) we had determined the energy-momentum tensor of the electromagnetic field

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} g^{\kappa\lambda} + \frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} F_{\rho\kappa} F_{\sigma\lambda} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma}. \tag{56.13}$$

Speziell für die Energiedichte T_{00} folgt dann

In particular for the energy density T_{00} one obtains

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\frac{1}{8\pi} F_{0\alpha} F_{0\beta} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{16\pi} F_{\gamma\alpha} F_{\delta\beta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} && (56.14) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{a_0^2}{a^4(t)} \hat{F}_{0\alpha} \hat{F}_{0\beta} \hat{g}^{\alpha\beta} + \frac{1}{16\pi} \frac{a_0^4}{a^4(t)} \hat{F}_{\gamma\alpha} \hat{F}_{\delta\beta} \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{g}^{\gamma\delta} && (56.15) \end{aligned}$$

Daher ändert sich die Energiedichte proportional zu $a^{-4}(t)$. Da sich andererseits das Volumenelement proportional

Thus the energy density varies proportional to $a^{-4}(t)$. Since on the other hand the volume element changes proportional to

$$\mathrm{d}^3x \sqrt{-g} = \mathrm{d}^3x a^3(t) \sqrt{-\hat{g}} \tag{56.16}$$

verändert, erhält man für die Energie des Strahlungsfelds eine Änderung proportional $1/a(t)$ in Übereinstimmung mit der Rot-Verschiebung, wenn wir die Quanten-Beziehung $E = \hbar\omega$ für Photonen zu Grunde legen. Hier haben wir die Rechnung aber für ein klassisches elektromagnetisches Feld durchgeführt ohne auf die Quantentheorie zurückzugreifen.

one obtains for the energy of the radiation field a change proportional $1/a(t)$ in agreement with the red-shift, if we underlie the quantum relation $E = \hbar\omega$ for photons. Here however, we have performed the calculation for a classical electro-magnetic field without recourse to quantum theory.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass die Energie für ein System mit konstantem $a(t) = a_0$ erhalten bleibt. Dies ist tatsächlich der Fall, da dann die Homogenität der Zeit gegeben ist. Wir wollen uns das an Hand des Erhaltungssatzes (45.40)

Here we have presupposed that the energy for a system with constant $a(t) = a_0$ is conserved. This is indeed true, since homogeneity of time holds. We will consider this by means of the conservation law (45.40)

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{0\nu}) + \Gamma^0{}_{\nu\kappa} T^{\kappa\nu} \tag{56.17}$$

ansehen. Mit den C -Symbolen (54.5, 54.6) folgt

. With the C symbols (54.5, 54.6) one obtains

$$\Gamma^0{}_{\nu\kappa}T^{\kappa\nu} = -\frac{\dot{a}}{a}g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = -\frac{\dot{a}}{a}(T - g_{00}T^{00}) = \frac{\dot{a}}{a}T^{00}, \tag{56.18}$$

da die Spur $T = T^\mu_\mu = 0$ für das elektromagnetische Feld verschwindet. Bilden wir nun das Integral über den dreidimensionalen Raum, so folgt für die Energie

since the trace $T = T^\mu_\mu = 0$ vanishes for the electromagnetic field. If we perform the integral over the three-dimensional space, then the energy

$$E(t) = \int_V \mathrm{d}^3x\,\sqrt{-g}T^{00} \tag{56.19}$$

die Gleichung

obeys the equation

$$\dot{E} + \int_V \mathrm{d}^3x\partial_\alpha(\sqrt{-g}T^{0\alpha}) + \frac{\dot{a}}{a}E = 0. \tag{56.20}$$

Der zweite Term kann in ein Integral über die Oberfläche des Volumens umgeformt werden, das den Energiestrom aus dem Volumen angibt, während der letzte die Energie-Veränderung durch die Veränderung der kosmischen Skala angibt. Ist das Volumen so groß, dass sich die Welle ganz innerhalb des Volumens V befindet, dann reduziert sich die Gleichung auf $\dot{E} + \dot{a}E/a = 0$, so dass

The second term can be transformed into a surface integral which yields the energy current out of the volume, whereas the last term yields the change of energy due to the change of the cosmic scale. If the volume is so large that the wave is completely inside the volume V then the equation reduces to $\dot{E} + \dot{a}E/a = 0$, so that

$$E(t) = \frac{E_0a_0}{a(t)} \tag{56.21}$$

gilt in Übereinstimmung mit der Änderung der Frequenz.

holds in agreement with the variation of the frequency.