Hydrodynamik

Wintersemester 2012 / 13

Georg Wolschin
Universität Heidelberg
Institut für Theoretische Physik

Hydrodynamik: Inhalt

(vorläufig; Kap. 2 ggf. komprimiert)

3. Viskose Fluide

3.1 Navier-Stokes Gleichung

3.2 Energiedissipation

3.3 Hagen-Poiseuillesches Gesetz

3.4 Reynoldssche Zahl, Turbulenzkriterium

3.5 Strömungen mit kleinem Re:
Stokessche Formel, Oseensche Gleichung

3.6 Laminarer Nachlauf

3.7 Beispiel exakte Lösung: Rotierende Scheibe

4. Turbulenz

4.1 Stabilität stationärer Strömungen;
Instabilitäten (Taylor-Couette, Rayleigh-Bénard)

4.2 Die doppelte Schwelle der Turbulenz

4.3 Entwickelte Turbulenz; Selbstähnlichkeit

4.4 Beispiel: Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen

1. Einleitung

Die Hydrodynamik ist ein Gebiet der Kontinuumsmechanik: der Mechanik der deformierbaren Medien.

- **Kontinuumsmechanik:** Mechanik der deformierbaren Medien
  - Feste Körper: Festkörpermechanik, Elastizitätstheorie → lineare partielle DGL
  - Dynamik der Fluide / Flüssigkeiten und Gase: Strömungslehre → nichtlineare partielle DGL
    - Dichtebeständige Fluide: räumlich u. zeitlich nahezu konstante Dichte
      - Rheologie: Makromolekulare Fluide (zB. Blut; Polymere)
      - Hydrodynamik: Newtonsche Fluide
    - Nicht-dichtebeständige Fluide: Gasdynamik

⇒ Die Strömungslehre (Dynamik der Fluide) umfasst mehrere Gebiete der Physik:

1) Hydrodynamik für einfache („Newtonsche") Fluide wie Wasser

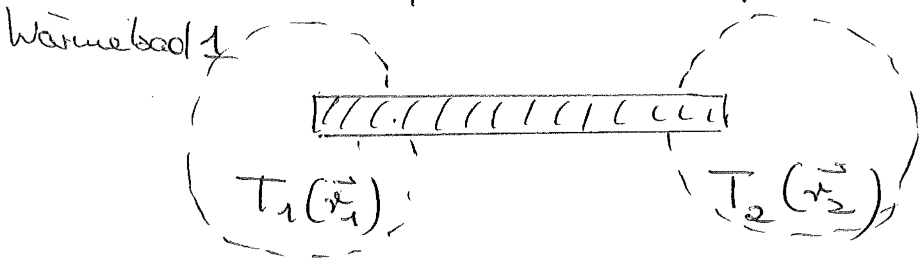
2) Rheologie: makromolekulare Fluide wie polymere Flüssigkeiten, Blut usw., die sich wegen der komplizierten Struktur der Moleküle anders als einfache Fluide verhalten.

3) Gasdynamik: Nicht-dichtebeständige Fluide (Gase,

Während sich die <u>Thermodynamik</u> v.a. mit Systemen im thermodynamischen <u>Gleichgewicht</u> beschäftigt („Gleichgewichts-Thermodynamik"), ist in der <u>Strömungslehre</u> der räumliche und zeitliche Verlauf von Prozessen in Systemen von Interesse, die sich <u>nicht im Gleichgewicht</u> befinden.

$\Rightarrow$ die globalen Zustandsgrößen der Gleichgewichts-thermodynamik wie <u>Druck p</u> und <u>Temperatur T</u> sind nicht mehr ausreichend.

<u>Beispiel</u>: <u>Stab</u> an beiden Enden durch Eintauchen in Wärmebäder auf unterschiedliche Temperaturen bringen



$$T = T(\vec{r})$$

Jetzt den Stab von den Wärmebädern isolieren

$\Rightarrow$ die Temperatur wird auch eine Funktion der Zeit,

$$T = T(\vec{r}, t).$$

Dabei sind kleine, aber makroskopische Teilsysteme zur Zeit t in einer Umgebung des Ortes $\vec{r}$ im <u>lokalen Gleichgewicht</u>.

Wird der Stab (oder ein anderes abgeschlossenes Makrosystem) sich selbst überlassen, geht er schließlich in ein globales Gleichgewicht über.

Bis er dazu kommt, gelten zwischen den Zustandsfeldern die gleichen Zusammenhänge wie in der Gleichgewichts-Thermodynamik.

zB. gilt für ein idealesGas im lokalen Gleichgewicht

die Zustandsgleichung

$$\boxed{p(\vec{r},t)\, V(\vec{r},t) = kT(\vec{r},t)}$$

mit dem lokalen Druck $p(\vec{r},t)$ und dem spez. Volumen $V(\vec{r},t)$.

Gibt es Bewegungen im Inneren des Systems, ist zur Zustandsbeschreibung auch ein Geschwindigkeitsfeld erforderlich

$\boxed{\vec{v}(\vec{r},t)}$ bzw. ein Stromdichtefeld $\boxed{\vec{j}(\vec{r},t)} = \varrho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$

Die Beschreibung eines räumlich und zeitlich veränderlichen Systems auf der Basis der Annahme des lokalen Gleichgewichts nennt man die "hydrodynamische Beschreibung".

Auf der Basis dieser Beschreibung soll in der VL die Hydrodynamik im engeren Sinn ($\hat{=}$ für Newtonsche Fluide) dargestellt werden.

Die Substanzen werden dabei – anders als in der kinetischen Gastheorie und der molekularen Hydrodynamik – als Kontinuum angesehen, d.h. ihre detaillierte molekulare Struktur (→ Rheologie) wird nicht berücksichtigt.

⇒ Ein infinitesimales Volumenelement in der Hydrodynamik ist klein gegenüber dem Volumen des betrachteten Körpers, aber groß im Vergleich zu den zwischenmolekularen Volumina.
(⇒ jedes Volumenelement ΔV enthält genügend viele Moleküle für eine kontinuierliche Beschreibung)

Der Zustand einer bewegten Flüssigkeit wird dann durch 5 Größen vollständig festgelegt:

- Geschwindigkeitsverteilung $\boxed{\vec{v}(\vec{r},t)}$ – 3 Komponenten
- zwei beliebige thermodynamische Größen, die über die Zustandsgleichung der Substanz alle anderen thermod. Größen festlegen. Wähle hier
  - Druck $p(\vec{r},t)$
  - Dichte $\rho(\vec{r},t)$

$\Rightarrow$ Das vollständige Gleichungssystem der Hydrodynamik muss dementsprechend 5 Gleichungen enthalten.

Für eine ideale Flüssigkeit (keine Viskosität, keine Wärmeleitfähigkeit) sind dies

- Die Eulerschen Gleichungen (3 komp.)
- Die Kontinuitätsgleichung
- Die Adiabatengleichung ($s =$ const : kein Wärmeaustausch mit der Umgebung).

Während in der Elastizitätstheorie für Festkörper die Probleme oft mit linearen partiellen DGLs formulierbar und exakt lösbar sind, ist das in der Hydrodynamik nicht der Fall: die Gleichungen sind nichtlinear und nur selten exakt lösbar. Die Entwicklung der Hydrodynamik erfolgte auch deshalb in engem Kontakt zum Experiment.

2. Ideale Fluide

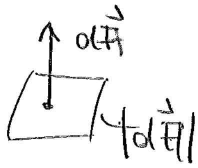
haben keine Viskosität und keine Wärmeleitfähigkeit. Herleitung der Grundgleichungen:

2.1 Kontinuitätsgleichung

sie drückt die Erhaltung der Masse in der Hydrodynamik aus und gilt auch für viskose Fluide.

Dichte ρ, Volumen V_0, Masse $\int_{V_0} \rho \, dV$

Fluss durch die Oberfläche von V_0: $\rho \vec{v} d\vec{A}$



$|d\vec{A}|$ = Größe des Flächenelements

$d\vec{A}$ in Richtung der äußeren Normalen

$\Rightarrow \rho \vec{v} d\vec{A} > 0$ für Fluss aus dV heraus

< 0 " " in dV hinein

$\Rightarrow \oint \rho \vec{v} d\vec{A}$ fließt pro Zeiteinheit aus V_0 heraus

(Integral über die geschlossene Oberfläche von V_0)

Die gleichzeitige Abnahme der Flüssigkeitsmenge in V_0 ist

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV$$ $\Rightarrow$ gleichsetzen ergibt

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV = \oint \rho \vec{v} d\vec{A}$$

↑ Oberflächenintegral mit dem Gauß'schen Satz in Volumenintegral umformen: $\int \vec{\nabla} \vec{a} \, dV = \oint \vec{a} \, d\vec{A}$

mit dem Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

ist $\vec{\nabla}\vec{a} \equiv \mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho\, dV = \int \vec{\nabla}(\rho\cdot\vec{v})\, dV$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\cdot\vec{v})\right] dV = 0 \quad \forall V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\cdot\vec{v}) = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

Mit

$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = \rho\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\rho \equiv \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\rho$

lässt sich die KG auch schreiben als

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\vec{\nabla}\vec{v} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\rho = 0}$$

oder mit dem Stromdichtevektor

$\vec{j} = \rho\cdot\vec{v}$ als

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0}$$

KG; Richtung von $\vec{j}$ = Richtung von $\vec{v}$;

$|\vec{j}|$ = Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch eine zur Geschwindigkeit $\perp$ Flächeneinheit fließt.

2.2 Eulersche Gleichung

Auf die geschlossene Oberfläche eines Flüssigkeits-volumens V_0 wirkt die Kraft

$$\vec{F} = -\oint p \, d\vec{A}$$ $\Rightarrow$ Umwandlung in ein Volumenintegral mit dem Gaußschen Satz

$$= -\int_{V_0} \vec{\nabla} p \, dV \equiv -\int_{V_0} \operatorname{grad} p \, dV$$

d.h. auf jedes Volumenelement dV wirkt die Kraft $-\vec{\nabla} p \, dV$.

Bewegungsgleichung für ein Volumenelement:

Kraft pro Volumeneinheit = Dichte × Beschleunigung

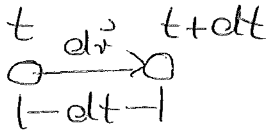
$$\boxed{-\vec{\nabla} p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Dabei ist $\frac{d\vec{v}}{dt}$ nicht allein die (lokale) Geschwindigkeitsänderung des Fluids in einem festen Raumpunkt, sondern eines sich im Raum bewegenden Fluidteilchens im Zeitintervall dt.

$\Rightarrow$ $d\vec{v}$ hat 2 Anteile:

(1) Änderung im Raumpunkt $\vec{r}$ während dt

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{bei konstantem } \vec{r}=(x,y,z)} dt$$ „lokale Ableitung“



(2) Differenz der Geschwindigkeiten zum gleichen Zeitpunkt t in zwei Raumpunkten mit Abstand $d\vec{r}$ ($\equiv$ dem in dt zurückgelegten Weg):

$$\Rightarrow \quad dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{d\vec{v}}{dy} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (d\vec{r}\,\vec{\nabla})\,\vec{v}$$

"konvektive Ableitung"

$\Rightarrow$ (1) + (2) ergibt die infinitesimale Geschwindigkeitsänderung

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\,dt + (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} \quad \Big| : dt$$

$\Rightarrow$ "substanzielle Ableitung" (Substanz = bewegtes Fluid)

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v}}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p$ ergibt

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}}$$

Eulersche Gleichung für ideale Fluide.

Konvektionsglied

Leonhard Euler, 1755
[*1707 Basel – 1783 St. Petersburg]

Die Nichtlinearität im Konvektionsglied erschwert die Integration erheblich: das Superpositionsprinzip (für lineare DGL) gilt hier nicht.

Die Nichtlinearität ist wesentlich verantwortlich für die Vielzahl hydrodynamischer Phänomene, und – unter bestimmten Bedingungen – für den Übergang zu chaotischem (turbulentem) Verhalten.

Im Schwerefeld wirkt auf jede Volumeneinheit zusätzlich die Kraft $\rho \cdot \vec{g}$, so dass

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}}$$ Euler-Gleichung im Schwerefeld

Die Gleichung gilt für ideale Fluide, bei denen Wärmeleitung und Zähigkeit vernachlässigbar sind. Beide Prozesse erzeugen Energiedissipation. Ohne sie ist die Bewegung in jedem Teil der Flüssigkeit adiabatisch: Die Entropie jedes Flüssigkeitselements bleibt bei der Bewegung im Raum konstant.

Mit $s = \frac{\text{Entropie}}{\text{Masseneinheit}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 0$

analog zu $\frac{d\vec{v}}{dt}$ gilt hier für die totale Zeitableitung (= Entropieänderung eines sich bewegenden Fluidelements)

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{\text{lokale}} + \underbrace{\vec{v}\,\vec{\nabla} s}_{\text{konvektive Ableitung}} = 0}$$ Adiabatengleichung

Mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$ lässt sie sich als „Kontinuitätsgleichung für die Entropie" schreiben,

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot s)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot s \cdot \vec{v}) = 0}$$

mit der Entropiestromdichte $\rho \cdot s \cdot \vec{v}$.

Beweis durch ausdifferenzieren und Einsetzen der KG:

$$\underbrace{\rho \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + (\rho \cdot \vec{v})(\vec{\nabla} s)}_{=0 \text{ (Adiabatengl.)}} + \underbrace{s \frac{\partial \rho}{\partial t} + s \vec{\nabla}(\rho \vec{v})}_{=0 \text{ (Kontinuitätsgl.)}} \overset{!}{=} 0$$

Oft vereinfacht sich die Adiabatengleichung: Ist die Entropie anfangs in allen Punkten des Flüssigkeitvolumens gleich, so bleibt sie auch während der weiteren Bewegung der Flüssigkeit zeitlich unverändert:

$$s(\vec{r})\big|_{t=0} = \text{const} \Rightarrow s(\vec{r}, t) = \text{const}. \ \forall t$$

"isentrope" (oder homentrope) Bewegung.

Für diesen Fall lässt sich mit der Enthalpie w (pro Masseneinheit) die Euler-Gleichung vereinfachen

$$dw = \underbrace{T ds}_{\text{innere Energie}} + \underbrace{V dp}_{\text{Verdrängungsarbeit}} \quad , \quad V = \frac{1}{\rho} \text{ spezifisches Volumen}$$

T = Temperatur

mit $s = \text{const} \Rightarrow ds = 0$

$$\Rightarrow dw = V dp = \frac{dp}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} w = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p}$$

und die Euler-Gl. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$

wird

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} w}$$

(Die Enthalpie wird wichtig bei isobaren Prozessen).

(bzw im Schwerefeld: $= -\vec{\nabla} w + \vec{g}$)

Durch Bilden der Rotation auf beiden Seiten, mit $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}=0$, und

$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\vec{\nabla}v^2}{2} - \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$ aus der Vektoranalysis

lässt sich im isentropen Fall die Euler-Gleichung in eine Gleichung umschreiben, die nur das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ enthält:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}\times[\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})]}$$

Euler-Gleichung für isentrope Bewegung (*)

Dazu kommt bei inkompressiblen Fluiden die Bedingung (wg. ρ = const, KG ⇒)

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{v} = 0}$$

der Unterschied kompressibel/inkompressibel fällt erst in der Nähe der Schallgeschwindigkeit ins Gewicht.

sowie die Randbedingungen

$v_\perp = 0$

$\vec{v}$

die Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit senkrecht zur Wand verschwindet, $\boxed{v_\perp = 0}$ am Rand des Fluids
"das Fluid kann nicht in die Wand eindringen"

bzw. bei zwei nicht mischenden Fluiden:

$$v_\perp^1 = v_\perp^2 = v_\perp^{\text{Grenzfläche}(1-2)}$$

(*) für $s \neq$ const. ist das i.a. nicht möglich, da $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}\right) \neq 0$. –

In der Euler-Gleichung (*) für die isentrope Bewegung fällt der Gravitationsterm weg, da

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -\vec{\nabla} U \quad , \text{ und } \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0 \;:$$

In der nur durch das Geschwindigkeitsfeld bestimmten Form der Euler-Gleichung gibt es keine Abhängigkeit von konservativen (= als Gradient eines Potentials darstellbaren) äusseren Kräften.

Der Einfluss der äusseren Kraft kann sich jedoch in den Randbedingungen beim Lösen der DGL bemerkbar machen.

2.3 Bernoullische Gleichung

Bei einer stationären Strömung ist die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Raumpunkt, den das Fluid einnimmt, zeitlich konstant:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Die Eulersche Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla}\left(w + \frac{v^2}{2}\right) \quad , \quad w = U + pV = T \cdot S + \frac{p}{\rho}$$

wird dann

$$\boxed{\vec{\nabla}\, \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla} w}$$

Daraus lässt sich die Bernoullische Gleichung ableiten:

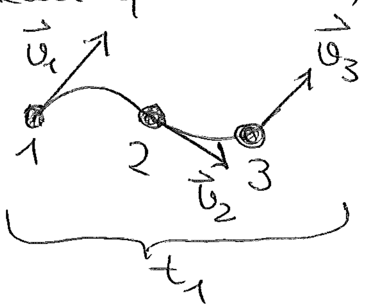
$$\boxed{\frac{v^2}{2} + w = \text{const.}}$$

Daniel Bernoulli, 1738 ("Hydrodynamica", Strasburg)

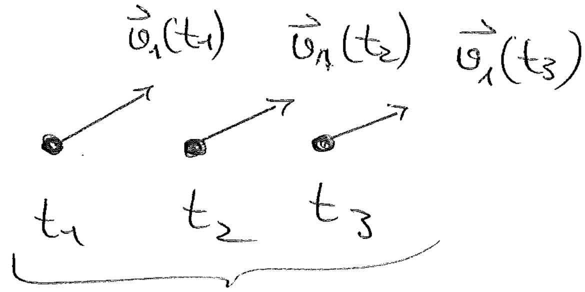
Der Wert der Konstanten ist i. a. verschieden für verschiedene Stromlinien.

Sie stimmen bei stationären Strömungen mit den Bahnkurven der Flüssigkeitsteilchen überein – bei einer nichtstationären Strömung ist das nicht der Fall:

Die Tangenten an die Stromlinien geben die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu gegebenem Zeitpunkt (für verschiedene Fluidteilchen in aufeinanderfolgenden Raumpunkten).



Stromlinie



Bahnkurve

Die Tangenten an die Bahnkurven geben die Richtungen von $\vec{v}$ bestimmter Fluidteilchen in aufeinander folgenden Zeitpunkten an.

Im Schwerefeld muss in der Euler-Gleichung und dementsprechend in der Bernoulli-Gleichung $\vec{g}$ ergänzt werden (in z-Richtung):

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + w + g \cdot z = \text{const}}$$

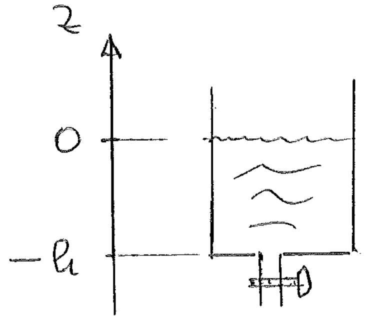
D. Bernoulli fand die Gleichung jedoch nicht durch Ableitung aus der (damals noch unbekannten) Euler-Gleichung, sondern direkt aus dem Energiesatz als

$$\boxed{\underbrace{\rho \frac{v^2}{2}}_{\text{kinetische Energie pro Volumeneinheit}} + \underbrace{p}_{\text{Druck: pot. Energie der inneren Kräfte}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{pot. Energie der äußeren Kraft pro Volumeneinheit}} = \text{const}}$$

Die Bernoullische Gleichung hat wichtige Anwendungen im Turbinenbau, der Aerodynamik usw.

Obwohl ihre Ableitung aus der Eulerschen Gleichung (s. Lehrbücher) zunächst nur für stationäre Strömungen gilt, lässt sich die BG auch auf nichtstationäre Strömungen verallgemeinern.

Bsp ① Aus der Bernoullischen Gleichung folgt das Torricellische Theorem, das Torricelli – ein Schüler Galileis – ~100 Jahre vor Bernoulli fand (Evangelista Torricelli; 1608–47)



Gefäß mit Hahn

Hahn geschlossen ⇒ $v = 0$ im ganzen Gefäß

$p = 0$ (Überdruck über Atmosphärendruck) an der Oberfläche, $z = 0$

Bernoullische Gl. ⇒ für $z = 0$: const $= 0$

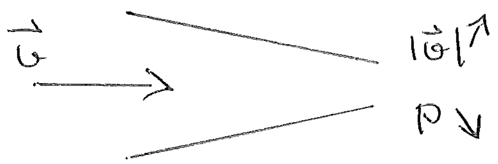
⇒ am Boden : $p = \rho \cdot g \cdot h$, hydrostat. Druck

Hahn öffnen ⇒

an der Öffnung $p = 0$ ⇒ $\frac{v^2}{2} = gh$ ⇒ $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$

≙ einfache Anwendung des Energiesatzes oder Bernoulli

② Stationäre Strömung durch eine horizontale Röhre von veränderlichem Querschnitt.

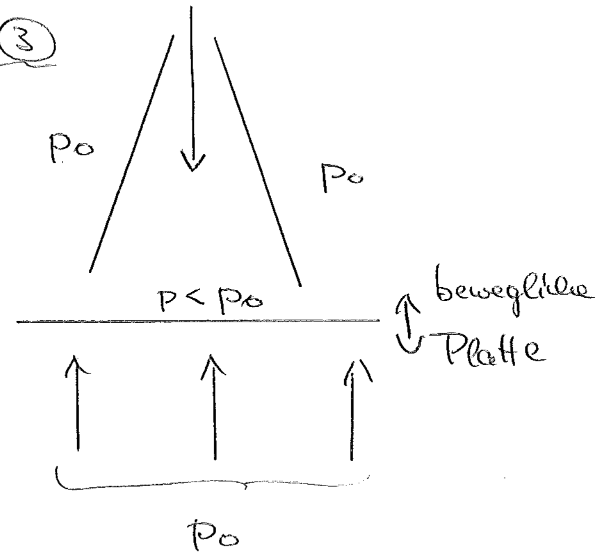


Bei Inkompressibilität ist die Durchflussmenge in jedem Querschnitt dieselbe

⇒ v nimmt bei abnehmendem Querschnitt zu, bei zunehmendem ab; nach Bernoulli $\left[\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const}\right]$ verhält sich der Druck umgekehrt.

(Eine Menschenmenge in einer sich verengenden Passage verhält sich gegensätzlich: die Geschwindigkeit nimmt ab, der Druck zu).

Bsp. (3)



Pressluft strömt durch einen Kanal mit zunehmendem Querschnitt gegen eine beweglich gelagerte Platte

$\Rightarrow$ die Platte wird angehoben.

Grund: Im Kanal nimmt die Geschwindigkeit der Luft ab, der Druck wg. Bernoulli'/Energiesatz zu. Am Kanalende herrscht Atmosphärendruck p_0, kurz davor (im Kanal) also $p < p_0$ $\Rightarrow$ es entsteht eine Saugwirkung von oben, die Platte wird angehoben (stark vereinfachte Darstellung).

2.4 Euler-Gleichung im linearisierten Fall

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} \qquad \text{EG}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \text{KG}$$

für ideale kompressible Fluide ist $\vec{\nabla}\vec{v} \neq 0$

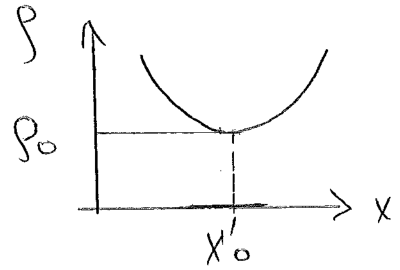
Linearisierung: zB. bei kleinen harmonischen Luftschwingungen in der Akustik

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$\Rightarrow \nexists$ quadratischen Glieder

<u>Beispiel Akustik</u>: p gemessen als Abweichung vom Atmosphärendruck p_0

ρ durch Normalwert ρ_0 der Dichte der ungestörten Atmosphäre ersetzen.



$$\rho = \rho_0 + \underbrace{\xi \frac{\partial \rho}{\partial x}\Big|_{x_0}}_{=0} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\Big|_{x_0} + \dots$$

(kleine Größen 2. Ordnung vernachlässigen)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \vec{v} = 0 \end{array}} \quad \left.\begin{array}{l} \text{Euler Gl., linearisiert} \\[2ex] \text{kont. Gl.} \end{array}\right\} \quad \text{4 lineare Gleichungen}$$

d.h. die Beschreibung wird auf zeitliche Änderungen der Dichte an einem festen Ort x_0 konzentriert.

Zusammenhang von <u>Druck p und Dichte ρ</u> aus der <u>Thermodynamik</u> einführen:

Bei isothermen Zustandsänderungen ist

$$\vec{\nabla} p = c^2 \vec{\nabla} \rho \Rightarrow \text{hier } \boxed{c \simeq \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}} \quad \text{Schallgeschwindigkeit}$$

Auf Meereshöhe ist $\rho_0 = 1.2928 \, \frac{kg}{m^3}$ $\left(\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{ms^2} \right)$

$p_0 = 101325 \, Pa \simeq 10^5 \, Pa$

$p_0 = 1013.25 \, hPa$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{101325}{1.2928}} \, \frac{m}{s} \simeq \underline{279.96 \, \frac{m}{s}}$$

Exp. Werte von c in Luft:

0	10	20	30	T (°C)
332	338	344	350	c ($\frac{m}{s}$)

d.h. der isotherme Wert von 280 $\frac{m}{s}$ ist wesentlich zu klein, da bei einem schnellen Wechsel der Luftschwingungen kein Wärmeausgleich möglich ist und deshalb die Zustandsänderung bei der Schallausbreitung nicht isotherm ist, sondern adiabatisch:

$\boxed{pV^{\kappa} = \text{const}}$ adiabat. Zustandsgleichung

der Adiabatenkoeffizient ist der Quotient der spezifischen Wärmekapazitäten,

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{f}$$

f = Anzahl der Freiheitsgrade,
f = 5 für zweiatomige Gase (3 Transl., 2 Rotation)
$\Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{7}{5} = 1.4}$
f = 3 für einatomige Gase, $\kappa = \frac{5}{3}$

und

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right) = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} = c^2$$

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{1.4} \cdot 279.96 \ \frac{m}{s} \simeq \underline{331.25 \ \frac{m}{s}}$$

in guter Übereinstimmung mit dem exp. Wert.

[Für polytrope Prozesse gilt allgemein $pV^x = \text{const.}$, $x = 0$ isobar, $x = 1$ isotherm, $x = \kappa$ adiabatisch, $x \to \infty$ isochor].

Die linearisierten Gleichungen werden mit der Schallgeschwindigkeit c :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + c^2 \vec{\nabla} \rho = 0}$$

daraus $\vec{v}$ eliminieren:
KG partiell nach t differenzieren,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow$ $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ in Eulergl. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \Delta \rho}$$

Dieselbe Gleichung gilt für p, da $\vec{\nabla} p$ und Δp, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ bis auf c^2 gleich den mit ρ gebildeten Größen sind

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p}$$

$\Rightarrow$ Schwingungsgleichung,
wie bei der schwingenden Saite mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, oder der schwingenden Membran mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

2

Lösung: hier - analog zur Saite - nur eine Koordinate betrachten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Integration durch die sog. d'Alembertsche Lösung,

$$p(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct)$$

mit willkürlichen reellen Funktionen F_1, F_2

Mit der Anfangsbedingung für $t=0$

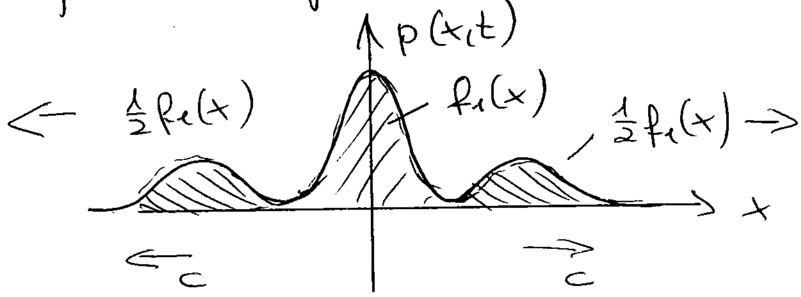
$$p = f_1(x), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = f_2(x) \quad \text{wird}$$

$$F_1(x) + F_2(x) = f_1(x)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x) \qquad \text{Integration ergibt}$$

$$\Rightarrow \quad F_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\left[f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x} f_2(\xi)\, d\xi \right]$$

Für $f_2 = 0$ wandert eine anfängliche Druckstörung $f_1(x)$ zur Hälfte nach rechts, zur Hälfte nach links, jeweils mit Geschwindigkeit c, und ohne Formänderung.



Das entspricht der Ausbreitung eines Geräusches, mit Schallgeschwindigkeit c (analog zu Saite, die bei $t=0$ angezupft und dann sich selbst überlassen wird.)

Die Fortpflanzung ist longitudinal: Transversalwellen gibt es bei idealen Fluiden nicht.

Bei periodischen Luftschwingungen ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz

$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ die Frequenz (Schwingungszahl/s, Tonhöhe)

$\Rightarrow$ F_1, F_2 sind trigonometrische Funktionen mit Phasen α, β, Amplituden a, b:

$F_1(x+ct) = b\cos(kx + \omega t + \beta)$: in $-x$ Richtung

$F_2(x-ct) = a\cos(kx - \omega t + \alpha)$: in x- "

Bei $a=b$ ergibt die Überlagerung eine stehende Welle.

Die Schallgeschwindigkeit ist $\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}}$.

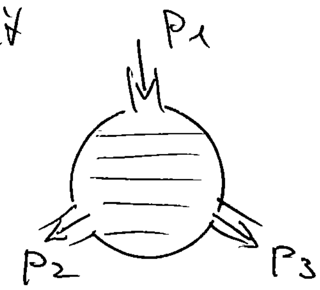
2.5 Hydrostatik

Für eine ruhende Flüssigkeit ohne äußere Kräfte wird die Euler-Gleichung wg. $\vec{v} \equiv 0$

$\vec{\nabla} p = 0 \Rightarrow p = \text{const}$:

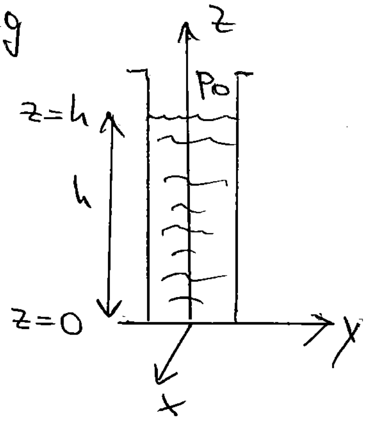
Der Druck ist in allen Punkten der Flüssigkeit gleich (im Innern und am Rand):

Pascalsches Gesetz (Blaise Pascal, 1623-62)



Im Schwerefeld wird die Euler Gleichung

$$\boxed{\vec{\nabla} p = \rho \cdot g}$$



Für inkompressible Fluide ($\rho = \text{const}$) lässt sich die Gleichung integrieren:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$$

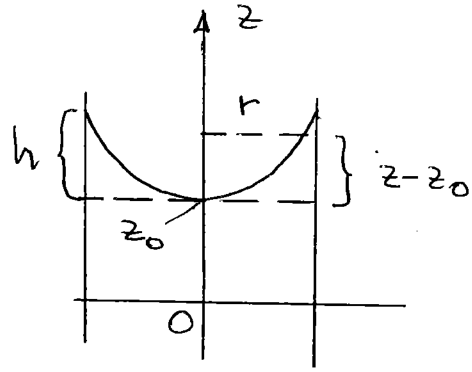
$\Rightarrow p = -\rho \cdot g \cdot z = \text{const}$, mit $\text{const} = p_0$: Druck an der Oberfläche $z = h \Rightarrow p = p_0$

$\Rightarrow \text{const} = p_0 + \rho g h$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 + \rho g (h - z)}$$

Im allgemeinen – und bes. für Gase – ist ρ jedoch nicht konstant; für Fluide im thermischen Gleichgewicht lässt sich die Euler-Gleichung dennoch integrieren.

Bei Rotation des Zylinders: Flüssigkeitsgefüllte Zentrifuge die mit $\omega = \text{const}$ um die Vertikale rotiert.
Die Zentrifugalkraft hat ein Potential und ermöglicht Gleichgewicht $\Rightarrow$ quasi-statisches Problem



Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit

$F_r = \rho \cdot r \cdot \omega^2$

Zentrifugalpotential

$U_r = -\frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2$, $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$\Rightarrow$ Gesamtpotential von Gravitation und Rotation

$$U = \rho g z - \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 = \rho g\left(z - \frac{r^2\omega^2}{2g}\right)$$

Mechanische Gleichgewichtsbedingung:

$$\vec{\nabla} p = \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(p + U) = 0$$

$$p = -U + \text{const} \quad \hat{=} \quad p + U = \text{const.}$$

$$p = \rho g\left(\frac{r^2\omega^2}{2g} - z\right) + \text{const.}$$

Bestimmung der Konstanten:
$z_0 =$ Wasserstandshöhe bei $r = 0$, p der Überdruck über den äußeren Atmosphärendruck

$$\Rightarrow \quad 0 = -\rho g z_0 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = \rho g z_0$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \rho \cdot g\left(\frac{r^2\omega^2}{2g} + z_0 - z\right)}$$

Daraus folgt die Gleichung der „freien Oberfläche"
mit $p = 0$:

$$z - z_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$

und mit h = Auftriebshöhe des Wassers am Rand: $r = R$
$\Rightarrow h = z - z_0$

$v = \omega r$ Bahngeschwindigkeit

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{v^2}{2g}} \quad \text{Oberflächenparaboloid}$$

Die Niveauflächen konstanten Druckes sind kongruente Paraboloide, die gegen das Oberflächenparaboloid nach unten verschoben sind.

2.6 Energie- und Impulsstrom im Fluid

Die Energie des Fluids pro Volumenelement ist

$\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon$ = kinet. + innere Energie
(ε = innere Energie pro Masseneinheit)

Bei Bewegung folgt die zeitliche Änderung aus der partiellen Ableitung

$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] =$. Sie lässt sich aus Kontinuitätsgleichung, Euler-Gleichung, und der thermodynamischen Relation $d\varepsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$ berechnen; man erhält

$$= \ldots = -\vec{\nabla} \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] ,$$

$w = \varepsilon + pV = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$
Enthalpie pro Masseneinheit.

Die Energieänderung des Fluids pro Zeiteinheit in einem gegebenen Volumen V ergibt sich durch Integration über dieses Volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\rho\frac{v^2}{2}+\rho\varepsilon\right]dV = -\int_V \vec{\nabla}\left[\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]dV$$

mit Gaußschem Satz $\int_V \vec{\nabla}\vec{a}\,dV = \oint_A \vec{a}\,d\vec{A}$

in Oberflächenintegral umformen:

$$= -\oint_A \rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\vec{A} =$$

$$= -\oint_A \vec{j}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\vec{A}$$

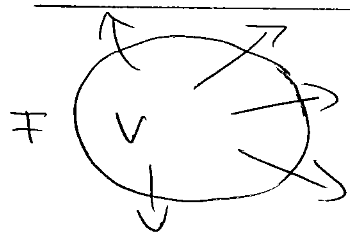
$\hat{=}$ Energiemenge, die pro Zeiteinheit aus dem betrachteten Volumen V durch dessen Begrenzungsfläche A herausfließt.

$\Rightarrow$ $\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right) = \vec{j}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)$ = Vektor der Energiestromdichte.

Das Fluid mit Stromdichte $\vec{j}=\rho\cdot\vec{v}$ führt pro Masseneinheit bei der Bewegung die Energie

$\frac{v^2}{2}+w$ mit sich: hier steht die Enthalpie anstelle der inneren Energie: $w=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left[\rho\frac{v^2}{2}+\rho\varepsilon\right]dV = -\underbrace{\oint_A \rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\vec{A}}_{} - \underbrace{\oint_A p\vec{v}\,d\vec{A}}_{}}$$



kinet. + innere Energie, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche transportiert wird	Arbeit, die von den Druckkräften an der Flüssigkeit innerhalb der geschlossenen Oberfläche geleistet wird

Impulsstrom

Der Impulsstrom folgt analog aus Kontinuitätsgleichung, Euler-Gleichung, und thermodyn. Relationen:

$\rho \cdot \vec{v}$ = Impuls pro Volumeneinheit

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v})$ = Geschwindigkeit der Impulsänderung

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v}\, dV = \dots = - \int_V \vec{\nabla} \left[p + \rho v^2 \right] dV$$

$$= - \oint_A \left[p + \rho v^2 \right] d\vec{A}$$

$\Rightarrow \boxed{p + \rho v^2}$ Dichte des Impulsstromes durch die Oberfläche.

$[\rho v^2] = \frac{kg}{m\, s^2}$

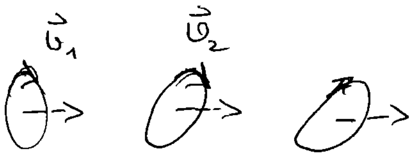
2.7 Zirkulation, Thomsonscher Satz

Die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve ist definiert als ($d\vec{\ell}$ = Linienelement auf der Kurve)

$$\Gamma = \oint_K \vec{v}\, d\vec{\ell}$$

Bei Bewegung des Fluids ändern sich $\vec{v}$ und die Gestalt der Kurve; wie verhält sich die Zirkulation?

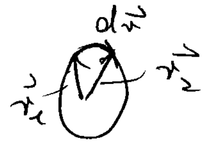
$$\frac{d}{dt} \oint_K \vec{v}\, d\vec{\ell} \; ?$$



totale Zeitableitung: Änderung der Zirkulation längs einer sich bewegenden Flüssigkeitskurve, nicht längs einer raumfesten.

δ: Differentiation nach den Ortskoordinaten
d: " " der Zeit

$d\vec{r}$: Linienelement auf der Kurve; als Differenz $\delta\vec{r}$ der Ortsvektoren $\vec{r}_i$ schreiben:



$$\Gamma = \oint \vec{v}\, d\vec{r}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \vec{v}\,\delta\vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt}\,\delta\vec{r} + \oint \vec{v}\,\frac{d}{dt}\,\delta\vec{r}$$

es ist $\vec{v}\,\frac{d}{dt}\,\delta\vec{r} = \vec{v}\,\delta\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\,\delta\vec{v} = \delta\,\frac{v^2}{2}$

und $\oint \delta\,\frac{v^2}{2} = 0$ (das Integral über ein vollständiges Differential längs einer geschlossenen Kurve verschwindet)

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \vec{v}\,\delta\vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt}\,\delta\vec{r}$$

Für isentrope Bewegungen ist die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} w$$

und mit der Stokesschen Formel lässt sich das Kurvenintegral in ein Flächenintegral überführen,

$$\oint_K \vec{a}\, d\vec{r} = \int_F (\vec{\nabla}\times\vec{a})\, d\vec{F} \Rightarrow$$

$$\oint_K \frac{d\vec{v}}{dt}\,\delta\vec{r} = \int_F \vec{\nabla}\times\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) d\vec{F} \underset{\uparrow}{=} 0$$

wg. $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} w$, und $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = 0$; ✓

gilt wg. $\vec{\nabla}\times\vec{g} = 0$ auch im Schwerefeld.

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \oint \vec{v}\, d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Gamma = \oint \vec{v}\, d\vec{l} = \text{const}}$$

Thomsonscher Satz (W. Thomson, 1869)

"Erhaltungssatz für die Zirkulation"

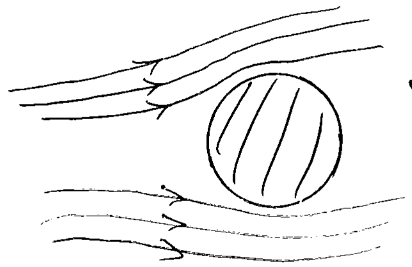
In einer idealen Flüssigkeit ist die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve bei isentroper Strömung konstant.

Auf eine unendlich kleine geschlossene Kurve δK anwenden, Integral mit der Stokesschen Formel umformen:

$$\oint_{\delta K} \vec{v}\, d\vec{l} = \int_{\delta F} \vec{\nabla} \times \vec{v}\, d\vec{F} \approx \delta F\, \vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{const.}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{v}$ = Wirbelung der Fluidströmung bleibt konstant bei der Bewegung des Fluids.

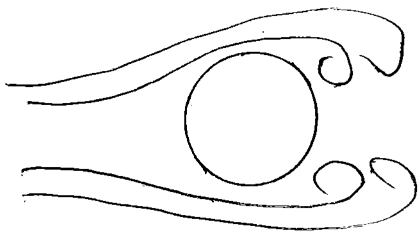
2.8 Potentialströmungen



$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$

sind Strömungen, für die im ganzen Raum gilt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0}$$



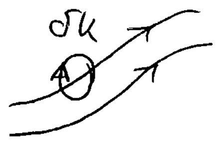
$\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$

d.h. wirbelfreie Strömung, bis auf evtl. singuläre Punkte oder Linien.

Bei Wirbelströmungen ist $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0}$

Aus der Erhaltung der Zirkulation folgt
– zunächst für stationäre Strömungen –

Sei $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ auf einem Punkt der Stromlinie; eine infinitesimale geschlossene Kurve δk umschließe die Stromlinie, und bewege sich mit dem Fluid

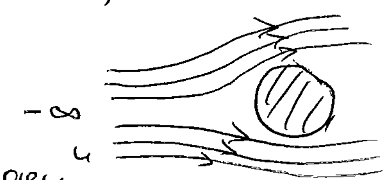


$$\Rightarrow \oint_{\delta k} \vec{v}\, d\vec{\ell} = \text{const} = \int_{F} (\vec{\nabla} \times \vec{v})\, d\vec{F} \qquad \text{(Stokes)}$$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ längs der gesamten Stromlinie, die Rotation verschwindet auch in allen anderen Punkten der Stromlinie.

Bei nicht stationären Strömungen gilt das auch, nur betrachtet man hier anstelle der Stromlinie die in der Zeit von einem bestimmten Fluidteilchen zurückgelegte Bahnkurve (die nur bei stat. Strömungen mit der Stromlinie übereinstimmt).

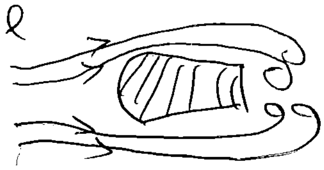
Ist der von $-\infty$ auf einen Körper einströmende Strom "homogen" ($\vec{v} = \text{const.}$), so ist die stationäre Strömung um einen beliebigen Körper eine Potentialströmung mit $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$.



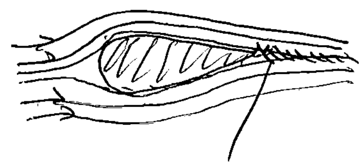
Dennoch unterscheidet sich das wahre Strömungsbild beim Umströmen eines Körpers von einer Potentialströmung, denn die Strömung längs der Wand ermöglicht keine geschlossenen Kurven um Stromlinien

⇒ die Stromlinien „lösen sich ab" und verlaufen im Innern der Flüssigkeit: Es gibt einen Sprung in der tangentialen Geschwindigkeitskomponente

⇒ für ideale Fluide gibt es eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen mit Flächen tangentialer Unstetigkeiten. Da sie instabil sind, wird die Strömung turbulent.



Bei realen (viskosen) Fluiden ist die Lösung jedoch als Folge der Zähigkeit i.a. eindeutig; entscheidend ist dabei das Verhalten in der Grenzschicht.

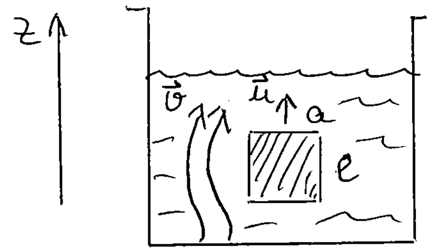


Bei stromlinienförmigen Körpern ist die Strömung nur in einer dünnen Flüssigkeitsschicht in der Nähe der Oberfläche des Körpers, und im schmalen Bereich des Nachlaufs keine Potentialströmung.

Kleine Schwingungen eines eingetauchten Körpers

als Beispiel für eine Potentialströmung:

Für kleine Amplituden $a \ll l$ (l die lineare Dimension der Körpers) ist die Strömung um den schwingenden Körper eine Potentialströmung.



$u \sim \omega a$:

$$z(t) = a\cos\omega t$$
$$u(t) = -\omega a \sin\omega t$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 a \cos\omega t$$
$$|u_{max}| = \omega a$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{max}\right| = \omega^2 a$$

Größenordnung der Glieder in der Euler-Gleichung abschätzen:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} w$$

$\vec{v}$ (Strömungsgeschwindigkeit) wird durch die Schwingungen des Körpers (mit $\vec{u}$) in Abständen der Größenordnung l geändert

$\Rightarrow$ Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{u}{l}$

In der Nähe des Körpers wird die Größe von v durch u bestimmt,

$$v \sim u \Rightarrow |(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}| \sim \frac{u^2}{l}$$

wegen $\omega \sim \frac{u}{a}$ ist dort mit $v \sim u$

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \sim \omega u \sim \frac{u^2}{a}$$

Für kleine Schwingungen, $a \ll l \Rightarrow$

$$|(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}| \ll \left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\vec{\nabla} w}$$

$\Rightarrow$ Vernachlässigen des konvektiven Teils.

Bilde die Rotation, $\vec{\nabla} \times$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{const}}$$

Der zeitliche Mittelwert von $\vec{v}$ ist $\langle \vec{v} \rangle_t = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0}$ Die Strömung einer Flüssigkeit, die kleine Schwingungen ausführt, ist in erster Näherung eine Potentialströmung.

Eigenschaften von Potentialströmungen:

1) Die Zirkulation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist 0:

$$\Gamma = \oint_K \vec{v}\, d\vec{l} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{v})\, d\vec{F} = 0$$

[$\Rightarrow \nexists$ geschlossenen Stromlinien in einer Potentialströmung (denn die Richtung der Stromlinie stimmt mit der Richtung der Geschwindigkeit überein, und die Zirkulation längs einer geschlossenen Linie wäre $\neq 0$)]

2. Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ kann bei Potentialströmungen $\vec{v}$ als Gradient eines Skalars – des Geschwindigkeits-potentials ϕ – dargestellt werden:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$$

so dass die Euler-Gleichung für die Geschwindigkeit

$$-\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} v^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla} w \qquad \text{wird}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0 \Rightarrow \text{Potentialgleichung.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t)}$$

, mit einer beliebigen Zeitfunktion $f(t)$; mit $w = \frac{p}{\rho}$ verknüpft die Gleichung Geschwindigkeit und Druck.

als erstes Integral der Bewegungsgleichungen für eine Potentialströmung.

Für eine stationäre Strömung ist ϕ zeitunabhängig,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + w = \text{const}}$$

, Bernoullische Gleichung folgt direkt für stationäre Strömungen

beachte: für eine Potentialströmung ist die Konstante in der BG im gesamten Fluidvolumen konstant, für eine beliebige Strömung nur längs jeder einzelnen Stromlinie.

2.9 Inkompressible Fluide

Ein Fluid ist inkompressibel für

$\boxed{\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1 :}$ keine merkliche Kompression oder Ausdehnung während der Bewegung

Notwendige Bedingungen für Inkompressibilität:

Abschätzung der Dichteänderung $\Delta\rho$ bei Druckänderung um Δp (adiabatisch)

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{s=\text{const}} \Delta p$$

Nach Bernoulli sind die Druckschwankungen in einer stationär strömenden Flüssigkeit von der Größenordnung

$$\Delta p \sim \rho v^2$$

Ferner ist mit der Schallgeschwindigkeit c im Fluid

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s = c^2$$

$$\Rightarrow \Delta\rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2}, \quad \boxed{\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{c^2}} \ll 1$$

$\Rightarrow \boxed{v \ll c}$ Notwendige Bedingung für Inkompressibilität. Für eine stationäre Strömung ist das auch hinreichend.

Für nicht stationäre Strömungen muss eine weitere Bedingung erfüllt sein:

Die Zeit $\frac{s}{c}$, in der ein Schallsignal die Entfernung s zurücklegt, muss klein sein gegenüber der Zeit τ, in der sich die Strömung merklich ändert – dann lässt sich die Ausbreitung von Wechselwirkungen in der Flüssigkeit als momentaner Prozeß beschreiben:

$$\boxed{\frac{s}{c} \ll \tau}$$

[Herleitung: EG ohne Konvektionsterm:

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| = \left|\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{s \cdot \rho} \Rightarrow \Delta p \sim \frac{s}{\tau} \rho \cdot v$$

zugehörige Änderung von ρ mit $\Delta \rho \sim \frac{\Delta p}{c^2}$:

$$\Delta \rho \sim \frac{s \cdot \rho \cdot v}{\tau \cdot c^2}$$

Kontinuitätsgleichung:

vergleiche $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ mit $\rho \vec{\nabla} \vec{v} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}$ vernachlässigbar ($\rho \sim$ const)

für $\frac{\Delta \rho}{\tau} \ll \rho \frac{v}{s}$, oder $\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{s \cdot v}{\tau c^2} \ll \tau \cdot \frac{v}{s}$:

erfüllt für $\tau \gg \frac{s}{c}$, s.o.]

Für $\rho \simeq$ const ändert die Eulersche Gleichung ihre Gestalt nicht; man kann jedoch ρ in den Gradienten ziehen:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \vec{g}$$

Die Kontinuitätsgleichung wird für $\rho =$ const

$$\vec{\nabla}\vec{v} = 0$$

Da die Dichte bekannt (const.) ist, wählt man als System von Grundgleichungen am besten solche, die nur Geschwindigkeiten enthalten; Euler:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}\times\left[\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})\right]}$$

Da in der Euler-Gl. $\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)$ statt $\vec{\nabla}w$ steht, läßt sich die Bernoulli-Gl. angeben in der Form

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}$$

und die Energiestromdichte wird

$$\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = \rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right).$$

Für die Potentialströmung eines inkompressiblen Fluids werden die Gleichungen besonders einfach:

Mit $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ist die EG (p. 36) identisch erfüllt

Die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$ wird mit

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\phi = 0}$ Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential ϕ

(auch diese Gl. hatte L. Euler als erster eingeführt; sie enthält die Zeit nicht explizit, sondern nur über die Randbedingungen).

Mit den Randbedingungen an den Kontaktflächen Fluid-Rand:

feste Wand: $v_\perp = 0$

bewegl. Wand: $v_\perp$ = Projektion der Wandgeschwindigkeit auf die Normalenrichtung

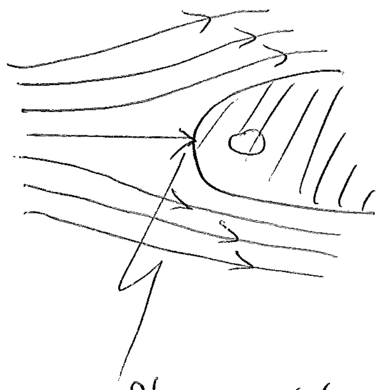
und es ist $v_\perp = \dfrac{\partial\phi}{\partial e_\perp}$ = vorgegebene Funktion der Koordinaten und der Zeit ($e_\perp$ = Normalenrichtung)

d.h. die Randbedingungen enthalten nur die Geschwindigkeit in Normalenrichtung

Stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids; Stromfunktion

$\vec{u}$

p_0



Staupunkt.

Wegen Bernoulli:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

ist der Druck bei einer stationären Strömung eines inkompressiblen Fluids (ohne Schwerefeld) dort am größten, wo die Geschwindigkeit 0 wird.
Dieser Punkt heißt Staupunkt.

Sei $\vec{u}$ die Geschwindigkeit des Fluids im Unendlichen
p_0 der Druck „ „ „ „

$\Rightarrow$ Druck im Staupunkt:

$$\boxed{p_{max} = p_0 + \rho \frac{u^2}{2}}$$

Bei zweidimensionaler (ebener) Strömung ($\vec{v}$ hängt nur von zwei Koordinaten ab) können die Geschwindigkeitskomponenten als Ableitung einer Stromfunktion $\psi(x,y)$ geschrieben werden:

KG $\quad \vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \quad v_x = \pm \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \mp \frac{\partial \psi}{\partial x}$: die Kontinuitätsgleichung ist automatisch erfüllt.
(analog mit entgegengesetzten Vorzeichen, s. S. H40)

Die Gleichung für die <u>Stromfunktion</u> ψ folgt durch Einsetzen in die Euler-Gleichung für die Geschwindigkeit,

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\times\vec v = \vec\nabla\left[\vec v\times(\vec\nabla\times\vec v)\right] \quad ; \quad \vec\nabla\times\vec v = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z=0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi}$$

$$= -\vec e_x\frac{\partial v_y}{\partial z} + \vec e_y\frac{\partial v_x}{\partial z} + \vec e_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

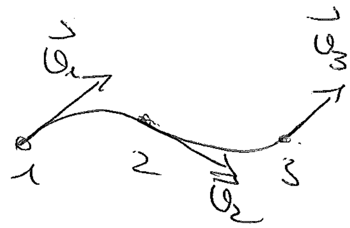
<u>In 2D:</u> $\vec\nabla\times\vec v = \vec e_z\,\Delta\psi$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

Aus der Stromfunktion läßt sich die Form der Stromlinien für eine stationäre Strömung unmittelbar bestimmen.

DGL für die Stromlinien bei ebener Strömung (kein v_z):

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y\,dx - v_x\,dy = 0$$



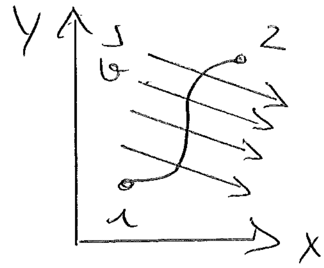
die Richtung der Tangente an eine Stromlinie stimmt in jedem Punkt mit der Richtung der Stromlinie überein.

$v_x(\psi)$, $v_y(\psi)$ einsetzen $\xRightarrow{\cdot(-1)}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\psi = \text{const.}}$$

d.h. die Stromlinien bilden eine Kurvenschar, die man erhält, wenn man die Stromfunktion $\psi(x,y)$ gleich einer beliebigen Konstanten setzt.

In der x-y-Ebene ist der Flüssigkeitsstrom Q durch eine Kurve zwischen 2 Punkten unabhängig von der Form der Kurve durch die Differenz der Werte der Stromfunktion in diesen Punkten bestimmt.



Mit $v_\perp$ = Projektion von $\vec{v}$ auf die Normale der Kurve in einem gegebenen Punkt,

$$Q = \rho \int_1^2 v_\perp \, dl = \rho \int_1^2 \left(-v_y \, dx + v_x \, dy \right) = \rho \int_1^2 d\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \rho\,(\psi_2 - \psi_1)}$$

Die Funktionentheorie liefert leistungsfähige Methoden zur Berechnung der Potentialströmung um verschiedenartige Profile.

Grundlage dieser Anwendungen:

Das Potential und die Stromfunktion hängen mit den Geschwindigkeitskomponenten wie folgt zusammen:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = +\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Die Beziehungen zwischen den Ableitungen der Funktionen ϕ und ψ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

stimmen mit den Cauchy-Riemannschen Dgln überein

Sie sind Bedingung dafür, dass das komplexe Potential

$$\boxed{w = \phi + i\psi}$$

das sich aus Geschwindigkeitspotential (Realteil) und Stromfunktion (Imaginärteil) zusammensetzt, eine analytische Funktion des komplexen Arguments $z = x + iy$ ist, bzw. dass $w(z)$ in jedem Punkt z differenzierbar ist als

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y \equiv \text{komplexe Geschwindigkeit},$$

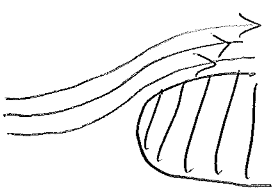
mit Betrag

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$$

Das Argument der komplexen Geschwindigkeit $w' \equiv \frac{dw}{dz}$ ist der Winkel Θ zwischen der Geschwindigkeit und der x-Richtung,

$$\boxed{w' = \frac{dw}{dz} = v\, e^{-i\Theta}}$$

An der Oberfläche einer umströmten festen Kontur muss die Geschwindigkeit tangential gerichtet sein.



Die Kontur muss mit einer Stromlinie übereinstimmen, auf ihr muss $\psi = \text{const}$ sein; die Konstante kann oBdA $= 0$ gesetzt werden.

Für eine vorgegebene Kontur wird das Strömungsproblem so auf die Bestimmung einer analytischen Funktion $w(z)$ zurückgeführt, die auf dieser Kontur reelle Werte annimmt.

Das Integral über eine analytische Funktion längs eines (beliebigen) geschlossenen Weges C ist gleich der mit $2\pi i$ multiplizierten Summe der Residuen der einfachen Pole innerhalb von C

$$\oint_C \frac{dw}{dz}\,dz = \oint_C w'\,dz = 2\pi i \sum_k A_k \,,$$

A_k = Residuen der komplexen Geschwindigkeit

Andererseits ist

$$\oint_C w'\,dz = \oint_C (v_x - i v_y)(dx + i dy) =$$
$$= \underbrace{\oint_C (v_x\,dx + v_y\,dy)}_{\Gamma} + i \oint_C (v_x\,dy - v_y\,dx)$$

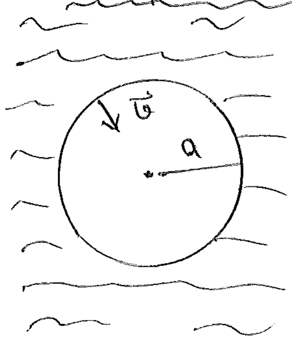
Der Realteil ist die Zirkulation Γ längs der Kurve C.
Der Imaginärteil $\cdot\,\rho$ gibt den Flüssigkeitsstrom durch die Kurve C an, s. S. 40. Sind innerhalb der Kurve keine Flüssigkeitsquellen, ist dieser Strom $= 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k}$$

alle Residuen A_k sind rein imaginär, so dass die Zirkulation Γ reelle Werte annimmt.

Die Theorie der <u>analytischen Funktionen</u> einer <u>komplexen Variablen</u> entspricht demnach der zweidimensionalen Potentialtheorie der Hydrodynamik.

zu: <u>Beispiel inkompressible Fluide</u>: (Rayleigh 1917) 1 dim.):



Eine inkompressible Flüssigkeit füllt den Raum; ein kugelförmiges Volumen mit Radius a wird entfernt. Nach welcher Zeit ist der Hohlraum mit Flüssigkeit gefüllt?

Die Strömung in den Hohlraum ist kugelsymmetrisch. Für die <u>radiale Geschwindigkeit</u> gilt die Eulersche Gleichung (EG)

$$v_r \equiv v < 0 \qquad ; \ \vec{\nabla} p_r \equiv \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

kG für inkompressible Fluide: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r = 0$

$\Rightarrow r^2 v = F(t)$, beliebige Funktion der Zeit $\left(\frac{\partial v}{\partial r} = 0\right)$

d.h. das Flüssigkeitsvolumen, das durch eine Kugel mit beliebigem Radius fließt, hängt wegen der Inkompressibilität nicht vom Radius ab.

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{F'(t)}{r^2}$ aus kG; in EG einsetzen:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \Big| \int_{\infty}^{R(t) \leq a} dr$$

a Radius des Hohlraumes

$$\Rightarrow -\frac{F'(t)}{R} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad \text{mit} \quad V = \frac{dR(t)}{dt}$$

V = Änderungsgeschwindigkeit des Hohlraum-Radius

p_0 = Druck bei $R \to \infty$

(Die Geschwindigkeit des Fluids bei ∞ und der Druck auf die Oberfläche des Hohlraumes sei $= 0$)

Mit $r^2 v = F(t)$ für Punkte auf der Oberfläche des Hohlraumes gilt

$$R^2(t)\, V(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow F'(t) = 2R\underbrace{R'}_{V} V + R^2 \frac{dV}{dt} = 2RV^2 + R^2 \frac{dV}{dt} \quad \text{in EG einsetzen}$$

$$-\frac{2\cancel{R}V^2}{\cancel{R}} - R\frac{dV}{dR} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$$

$$-\frac{3}{2}V^2 - R\frac{dV}{dR}\underbrace{\frac{dR}{dt}}_{V} = \frac{p_0}{\rho}$$

$$\boxed{-\frac{3}{2}V^2 - \frac{R}{2}\frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}}$$

Trennung der Variablen, integrieren mit der Anfangsbedingung $V = 0$ für $R = a$

$$V = \frac{dR}{dt} = \overset{(+)}{-}\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)}$$

$$\frac{dR}{-\sqrt{\cdots}} = dt$$

H45

Daraus die Zeit, in der der Hohlraum gefüllt wird: $\int_0^\tau dt \quad ; \quad \int_a^0 dR = -\int_0^a dR \Rightarrow$

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}} = \dots$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = \underline{0.915\, a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}}$$

Für $a = 0.1\,m$, $p_0 = 1000\,hPa = 10^5\,Pa = 10^5\,\frac{kg}{m\,s^2}$

und $\rho = 1\,\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}\,kg}{10^{-6}\,m^3} = 10^3\,\frac{kg}{m^3}$

wird $\tau \simeq 0.915 \cdot 10^{-2}\,s \simeq \underline{9\,ms}$

Note $\underline{\tau \propto a,\ \sqrt{\rho},\ \frac{1}{\sqrt{p_0}}}$

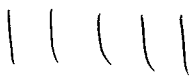
2.10 Wellen

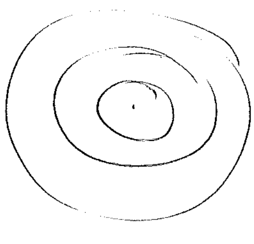
Wasserwellen sind komplizierter als akustische oder optische Wellen: als Oberflächenwellen sind sie an die Grenze zweier Medien gebunden; akustische und optische Wellen sind dagegen Raumwellen.

Unterschied Wirbel / Wellen:

Wirbel tragen Materie mit sich fort; bei Wellen bleiben die Flüssigkeitsteilchen im Mittel am Ort – es pflanzt sich nicht Materie, sondern Energie und Phase fort.

Unterscheidung von Wellen nach ihrer Symmetrie:

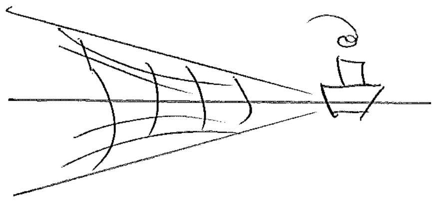
Ebene Wellen  $\Longrightarrow$ zB durch Windfront ausgelöst

Ringwellen  Amplituden nehmen mit der Entfernung ab; mathematisch kompliziert (Bessel-Funktionen, Fourier-Integrale)

Tiefseewellen haben Dispersion, $v = \sqrt{\frac{g}{k}}$: $v = v(k) = v(\lambda)$

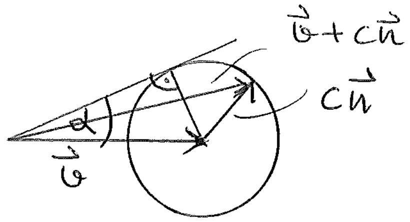
$\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

<u>Schiffswellen</u> sind Längswellen, die sich an den Schiffskörper schmiegen; Querwellen durchsetzen sie.



Das Gesamtsystem schreitet mit dem Schiff fort, ist also stationär.

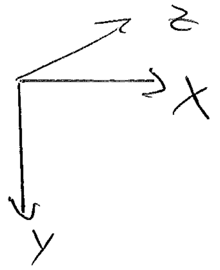
<u>Mach-Wellen</u> sind Stoßwellen bei Überschallströmungen mit $v > c$



$$\boxed{\sin\alpha = \frac{c}{v}}\ , \quad \alpha = \text{Machscher Winkel}$$

Die Störung breitet sich in Strömungsrichtung innerhalb eines Kegels mit Öffnungswinkel 2α aus.

Beschreibung ebener Wasserwellen (Oberflächenwellen)



- Ausbreitung in x-Richtung
- In Tiefenrichtung y wird die Welle weggedämpft

$\Rightarrow$ Welle $A e^{i(kx - \omega t)} e^{-ky}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz

$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit

A = Amplitude der Wasserwelle

$\Rightarrow$ 3 Parameter A, ω, k beschreiben die Wellenausbreitung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist die Phasengeschwindigkeit der Welle (d.h. ihre Phase φ, $e^{i\varphi}$, schreitet mit v fort).

Der veränderliche Teil der Phase ist durch $\varphi = kx - \omega t$ gegeben; setzt man ihn konstant ($\equiv$ Ort gleicher Phase zu verschiedenen Zeiten) folgt

$$k\,dx - \omega\,dt = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v}$$ Phasengeschwindigkeit

Für monochromatische Wellen (Wellen fester Frequenz) ist nur die Phasengeschwindigkeit von Bedeutung

Bei Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenz (v.a. benachbarter Frequenz) zu einem Wellenpaket (= Wellengruppe) ist dessen Gruppengeschwindigkeit u i.a. von v verschieden:

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}}$$ Gruppengeschwindigkeit

[wichtige phys. Größe in der Wellenmechanik: de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$ $\Rightarrow u = h/(m\lambda)$]

Nur bei dispersionsloser Wellenausbreitung ($\equiv v$ ist unabhängig von λ, k) fallen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zusammen, eine Wellengruppe kann ohne Formänderung fortschreiten

$$\omega = vk$$

$$\Rightarrow d\omega = v\,dk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v \equiv u$$

im allgemeinen ist jedoch

$$d\omega = v\,dk + k\,dv =$$

$$= v\,dk + k\frac{dv}{dk}\,dk \quad \Big|\ : dk,\ u = \frac{d\omega}{dk}\ ; \quad k = 2\pi\lambda^{-1},\ \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow u = v + k\frac{dv}{dk}$$

Es ist $\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{d\omega}{d\lambda}\frac{\lambda^2}{2\pi}$

$\Rightarrow \quad k\frac{d\omega}{dk} = -\lambda\frac{d\omega}{d\lambda}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u = \omega - \lambda\frac{d\omega}{d\lambda}}$$

allg. Zusammenhang Gruppen-/ Phasengeschwindigkeit

keine Dispersion: $\frac{d\omega}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = \omega$

normale Dispersion: $\frac{d\omega}{d\lambda} > 0 \Rightarrow$ Gruppengeschw. $u < \omega$ Phasengeschw.

anomale Dispersion: $\frac{d\omega}{d\lambda} < 0$: $u > \omega$

Man findet für Schwerewellen in Tiefwasser, $h \gg \lambda$

$\omega = \sqrt{\frac{g\cdot\lambda}{2\pi}}$, $\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\cdot\omega$

$\Rightarrow u = \omega - \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\omega < \omega$: normale Dispersion

Im flachen Wasser findet man ($h \ll \lambda$)

$\omega = \sqrt{g\cdot h}$: keine Dispersion

Bei Schwerewellen wird die Ausbreitung am besten über die Eulersche Gleichung mit Geschwindigkeitspotential beschreiben, $\vec{\omega} = -\vec{\nabla}\phi$

$$\boxed{-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p+U) = F(t)}$$

für kleine Amplituden wird das quadratische Glied vernachlässigt. An der freien Oberfläche herrscht Atmosphärendruck ($p \equiv 0$). Die einzige Zeitfunktion, die periodisch fortschreitende Wellen nicht stört, ist $F(t) \equiv const \equiv 0$ (oBdA)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{u}{\rho} = -\frac{\rho \cdot g \cdot y}{\rho} = -gy$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gy}$$

Die Welle breitet sich wie das Geschwindigkeitspotential aus; daraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen σ und λ (die Dispersion)

Ebene Kapillarwellen:

Wird λ immer kleiner, ist nicht mehr die Schwere, sondern die Oberflächenspannung σ für die Wellenausbreitung maßgebend, so dass die Dispersionsverhältnisse komplett geändert werden.

Die Oberfläche ist nicht mehr kräftefrei, sondern einem aus σ hervorgehenden Normaldruck ausgesetzt $\Rightarrow$

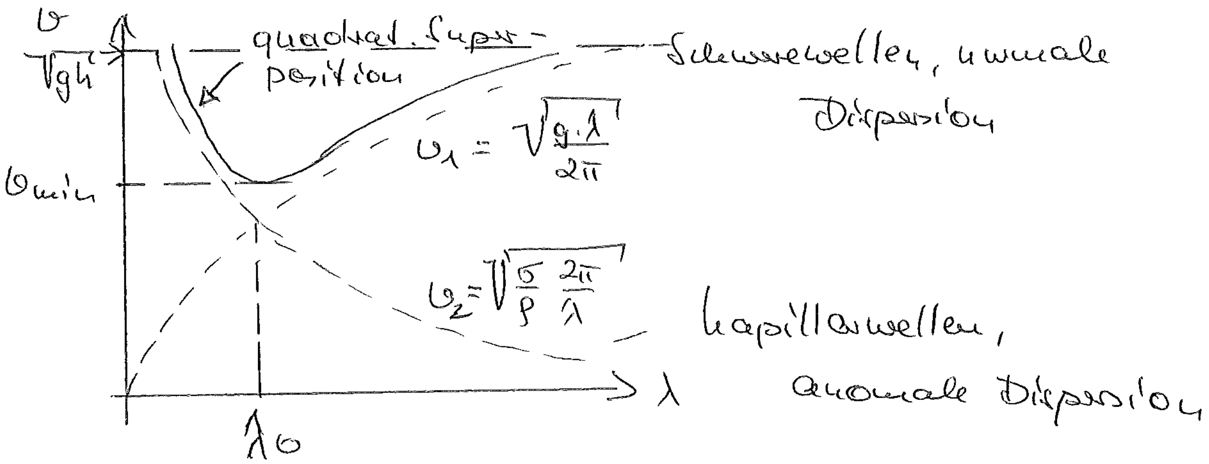
$$\boxed{-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = 0}$$

Man findet für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}}}$$

d.h. sie wächst mit abnehmendem λ, umgekehrt wie bei Schwerewellen in tiefem Wasser: anomale Dispersion

Dispersionsverhalten von Kapillar- und Schwerewellen:



Für $\lambda < \lambda_0$: die vorwärtstreibende Kraft der Kapillarwellen hängt von der Krümmung des Oberflächenprofils ab;

$\lambda > \lambda_0$: die Kapillarität ist bei großen Wellenlängen unbedeutend

Schnittpunkt:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda_0}}}_{\text{Kapillar}} = \underbrace{\sqrt{\frac{g \cdot \lambda_0}{2\pi}}}_{\text{Schwere}}$$

$$\Rightarrow \lambda_0^2 = \frac{\sigma \cdot (2\pi)^2}{\rho g} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}}}$$

$\Rightarrow$ v_{min} bei quadratischer Superposition:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad ; \quad v_{min} : v_1 = v_2 \Rightarrow$$

$$v_{min}^2 = 2 v_1^2 = 2 v_2^2 = 2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{min} = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}}}$$

Numerische Werte

Wasser vs. Luft: $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{s^2} = 72 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}$

die genannten Werte von σ erhält man bei Anregung von Kapillarwellen durch eine Stimmgabel

mit $\rho = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}} = 17.02 \cdot 10^{-3} m \simeq \underline{1.702 cm}$$

$$v_{min} = \sqrt{2\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}} = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \sqrt{72 \cdot 9.81}} \frac{m}{s} \simeq 0.231 \frac{m}{s} = \underline{23.1 \frac{cm}{s}}$$

= Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen mit $\lambda = \lambda_{min}$.

$\Rightarrow \nexists$ Wellen, die sich auf Wasser mit kleinerer Geschwindigkeit als $23 \frac{cm}{s}$ fortpflanzen; Wellen von größerer und kleinerer Wellenlänge als 1.7 cm laufen mit größerer Geschwindigkeit als 23 cm/s.

Lord Kelvin hat für Wellen mit $\lambda < \lambda_0$ den Namen „Ripples" vorgeschlagen; manchmal sind die Flanken breiter Schwerewellen von solchen feinen Ripples überdeckt.

3. Viskose Fluide: Grundgleichungen

Bei Strömungen viskoser Fluide untersucht man die Auswirkungen von Prozessen mit Energiedissipation auf die Strömung. Aufgrund der inneren Reibung (= Viskosität) und der Wärmeleitfähigkeit wird die Strömung thermodynamisch irreversibel.

3.1 Navier-Stokes-Gleichung

Bei viskosen Fluiden bleibt die Kontinuitätsgleichung unverändert,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0} \quad , \text{ bzw. } \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) \, , \; k = 1,2,3$$

In der Eulerschen Gleichung müssen jedoch zusätzliche Terme eingeführt werden, die der Energiedissipation Rechnung tragen:

η Viskositätskoeffizient, $\eta > 0$

ζ Zähigkeits- " , $\zeta > 0$

Bei isotropen Fluiden genügen diese beiden skalaren Größen; bei anisotropen Fluiden werden die Koeffizienten Tensoren.

η und ζ sind i.a. Funktionen von Druck p und Temperatur T, die nicht im ganzen Fluid gleich sein müssen. Meist können η und ζ jedoch näherungsweise konstant gesetzt werden.

Die Bewegungsgleichung wird dann

$$\boxed{\underbrace{\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}\right]}_{\text{Eulerscher Anteil}} = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v})}$$

Eulerscher Anteil

dynam. Viskosität, "Shear Viscosity"

2. Zähigkeit, "bulk viscosity" verschwindet für inkompressible Fluide, mit $\vec{\nabla}\vec{v}=0$.

⇒ Zähe inkompressible Fluide genügen der Navier-Stokes-Gleichung (NSG)

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}}$$

C.L. Navier 1827
Ableitung durch G.G. Stokes, 1845

im Vergleich zu Euler haben wir den Zusatzterm

$$\boxed{\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}}$$

mit der dynamischen Viskosität η,

$$[\eta] = \frac{kg}{m\,s} \hat{=} Pa\cdot s \qquad \left(Pa \equiv \frac{N}{m^2}\right)$$

das Verhältnis

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}}, \text{ mit } [\nu] = \frac{m^2}{s},$$ heisst kinematische Viskosität

typische Werte für η, ν:

	η [Pa·s]	ν $[\frac{m^2}{s}]$ $\cdot 10^{-5}$
Luft	$1.8\cdot10^{-5}$	1.50
Wasser	0.001	0.10
Quecksilber	0.00156	0.012
Alkohol	0.0018	0.22
Glycerin	0.85	68

Bei fester Temperatur hängt die dynamische Zähigkeit η von Gasen <u>nicht</u> vom Druck ab.

Da $pV = \text{const}$

$\Rightarrow$ kinemat. Zähigkeit $\nu \propto V \propto 1/p$.

Wie bei der Euler-Gleichung lässt sich der Druck aus der NSG eliminieren: bilde $\vec{\nabla}\times$,
verwende $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\vec{\nabla} v^2}{2} - \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{v}) + \underbrace{\nu\Delta(\vec{\nabla}\times\vec{v})}_{\to 0 \text{ in der Euler-Gleichung}}}$$

Mit $\vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{v}$ ist (s. z.B. Jackson, Class. Electrodynamics, 2. Umschlagseite)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{b}) = (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{b} + \underbrace{\vec{v}(\vec{\nabla}\vec{b})}_{=0 \text{ wg. } \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{v})=0} - \underbrace{\vec{b}(\vec{\nabla}\vec{v})}_{=0 \text{ wg. } \vec{\nabla}\vec{v}=0}$$

$$= [(\vec{\nabla}\times\vec{v})\vec{\nabla}]\vec{v} \quad \Big| = (-\vec{v}\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{\nabla}\times\vec{v} - [(\vec{\nabla}\times\vec{v})\vec{\nabla}]\vec{v} = \nu\Delta(\vec{\nabla}\times\vec{v})}$$

NSG für das Geschwindigkeitsfeld mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

Aus einer bekannten Geschwindigkeitsverteilung findet man die Verteilung vom Druck, indem man eine Gleichung vom Poissonschen Typ löst, die durch Bilden der Divergenz $\vec{\nabla}$ aus der ursprünglichen NSG folgt (stets inkompressibles Fluid mit $\vec{\nabla}\vec{v}=0$ vorausgesetzt)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta p = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_k \partial x_i}}$$

Wie im Euler-Fall lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung auch durch eine Stromfunktion $\psi(x,y)$ ausdrücken,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so dass die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist,

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

in NSG einsetzen $\Rightarrow$ $(\vec{\nabla})$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \nu\,\Delta\Delta\psi = 0}$$

Dazu kommen die Randbedingungen:

Zwischen der Oberfläche eines festen Körpers und dem zähen Fluid gibt es molekulare Anziehungskräfte. Sie halten die innerste Fluidschicht an der Wand fest
$\Rightarrow$ die Geschwindigkeit an der Wand (an festen Oberflächen) ist 0:

$\vec{v} = 0$ an festen Oberflächen, d.h. normale ($v_\perp = 0$) und tangentiale ($v_\parallel = 0$) Komponenten müssen verschwinden; bei idealen Fluiden war nur $v_\perp = 0$ gefordert.

Beachte: die Euler-Gleichungen könnten eine Randbedingung $v_\parallel = v_\perp = 0$ gar nicht erfüllen, weil die räumlichen Ableitungen dort von erster Ordnung sind; in der NSG sind sie wegen des Viskositätsterms von zweiter Ordnung.

Bei einer bewegten Oberfläche muss $\vec{v}$ gleich der Geschwindigkeit dieser Oberfläche sein.

3.2 Energiedissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid

Aus Viskosität ergibt sich Energiedissipation, d.h. Umwandlung von Energie in Wärme. Dabei wird jedoch die detaillierte molekulare Struktur des Fluids nicht berücksichtigt.

Berechnung der dissipierten Energie in einer inkompressiblen Flüssigkeit:

Gesamte kinetische Energie:

$E_k = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV$; bilde Zeitableitung:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{aus NSG einsetzen:}}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma'_{ik}}_{= \frac{\eta}{\rho} \Delta v}$$

mit dem Reibungstensor

$$\sigma'_{ik} = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]$$ bei inkompressiblen Fluiden

($\equiv$ der Teil des Impulsstromes, der nicht mit dem unmittelbaren Transport des Impulses gemeinsam mit der Masse des bewegten Fluids zusammenhängt)

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt} E_k = -\frac{\eta}{2} \int_V \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]^2 dV} \qquad i,k = 1,2,3$$

Energiedissipation in einem inkompressiblen Fluid; sie bewirkt eine Abnahme der mechanischen Energie:

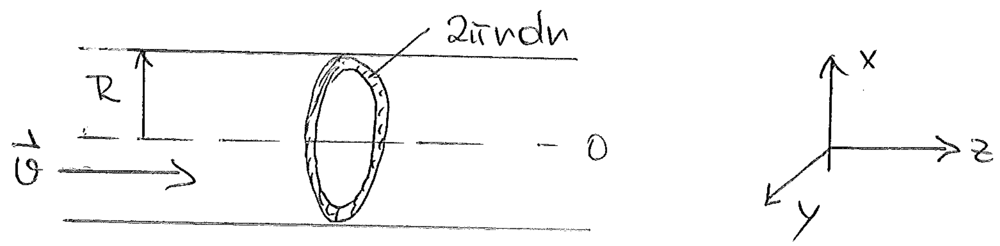
$\frac{d}{dt} E_k < 0$ (Das Integral ist wg. des quadratischen Integranden stets positiv; demnach muss der Viskositätskoeffizient $\eta > 0$ sein;

$$\frac{d}{dt} E_k \propto -\eta$$

3.3 Hagen-Poiseuillesches Gesetz

Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit durch ein Rohr („Poiseuille-Strömung")

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1, \quad \rho \simeq \text{const}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = 0$$



Durchflußmenge Q:

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v \, dr$$

Voraus.: keine Querschnittsänderung; stationäre Strömung

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ hängt nur von x und y ab. Die Kontinuitätsgleichung ist identisch erfüllt,

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0.$$

Berechne das <u>Geschwindigkeitsprofil</u> über den Querschnitt:

x- und y-komponente der NSG ergeben

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$: p bleibt über den Rohrquerschnitt konstant

Die z-komponente folgt aus der NSG als

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0 : konvektives Glied vernachlässigen, <u>lineare Näherung</u>

$$\Rightarrow \Delta\vec{v} = \frac{\vec{\nabla}p}{\eta} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz} \simeq -\frac{\Delta p}{\eta \cdot l}$$

mit Δp = Druckdifferenz an den Rohrenden (−: Druck fällt ab)

l = Rohrlänge

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz}$$

; $\vec{v}$ hängt nur von x, y ab

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = \text{const}}$$

d.h. die Geschwindigkeitsverteilung im Flüssigkeitsstrom wird durch eine 2dim. Gleichung vom Typ

$\boxed{\Delta\vec{v} = \text{const}}$ bestimmt.

Mit der <u>Randbedingung</u> $\vec{v} = 0$ am Rohrrand als Folge der Viskosität.

In Polarkoordinaten ist

$$\vec{v}(\vec{r}) = v(r)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta \cdot l}$$

Integration ⇒ (Aufgabe!)

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b$$

Die Geschwindigkeit muss über das ganze Rohr incl. Mittelachse ($r=0$!) endlich bleiben ⇒ $a=0$

Bestimmung von b:

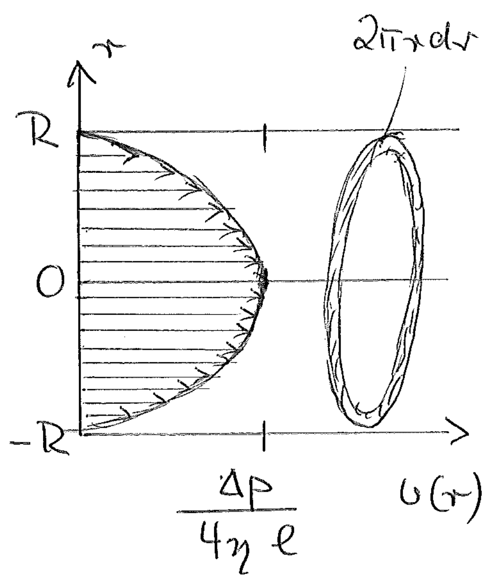
$v(r)=0$ für $r=\pm R$, viskose Flüssigkeit am Rand:

$$0 = -\frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 + b \Rightarrow b = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \Rightarrow$$

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$$

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)}$$

parabolisches Geschwindigkeitsprofil über den Radius des Rohres.



Durchflussmenge als Funktion von R:

Durch den Kreisring $2\pi r\,dr$ tritt pro Sekunde die Flüssigkeitsmenge $\rho \cdot v \cdot 2\pi r \cdot dr$

Integration über alle Kreisringe:

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r \cdot v\,dr$$

⊙ einsetzen ⇒

$$Q = \frac{2\pi \rho \Delta p}{4\eta l} \int_0^R r\,(R^2 - r^2)\,dr$$

$$= \frac{\pi \rho \Delta p}{2\eta\, l} \underbrace{\left[\frac{1}{2} R^2 \cdot R^2 - \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \right]}_{= \frac{1}{4} R^4} \quad ; \text{ mit } \eta = \nu \cdot \rho$$

$$= \frac{\pi \cancel{\rho} \Delta p}{2 \nu \cancel{\rho} \cdot l} \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \nu l} R^4}$$ unabhängig von der Dichte ρ des Fluids

bzw. $$\boxed{Q = \frac{\pi \Delta p \cdot \rho}{8 \eta l} R^4}$$

mit der dynamischen Viskosität η

⇒ es ergibt sich das (empirisch bekannte, $Q \propto R^4$)

<u>Hagen-Poiseuillesche Gesetz</u>,

G. Hagen 1839
J. Poiseuille 1840 } empirisch bestimmt

G.G. Stokes 1845, theoretische Herleitung wie oben.

3.4 Reynoldssche Zahl; Turbulenzkriterium

Zwar sind die NSG,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$ bei kompressiblen Fluiden,

und $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$ bei inkompressiblen Fluiden,

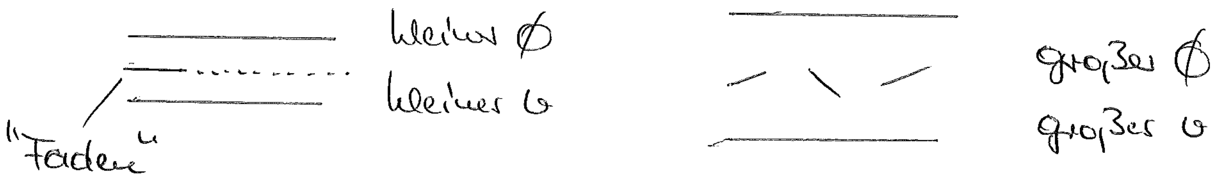
grundlegend für die Darstellung der gesamten Flüssigkeitserscheinungen.

Jedoch ist die Frage der Stabilität einer Strömung, d.h. das Umschlagen von laminarer in turbulente (chaotische) Strömung, auf dieser Grundlage noch nicht vollständig beschreibbar.

Ein wichtiges Stabilitätskriterium liefert die Reynoldssche Zahl Re.

Sie ist ein Maß für die Stärke der Konvektion relativ zur Viskosität; das Umschlagen von laminarer in turbulente Strömung wird durch einen kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl gekennzeichnet. Sie hat z.B. bei Rohrströmungen (Poiseuille, s.o.) einen bestimmten Wert, der nicht vom Durchmesser des Rohres abhängt.

Der englische Physiker Osborne Reynolds untersuchte im 19. Jhdt. Strömungen verschiedener Geschwindigkeiten durch Glasröhren verschiedenen Durchmessers. Anhand eines gefärbten „Flüssigkeitsfadens" beobachtete er das Umschlagen von laminar in turbulente Strömung:



Der Faden verläuft parallel zur Röhrenachse: regelmäßig geschichtete, laminare Strömung wie bei Hagen-Poiseuille

Unregelmäßige Schlängelbewegungen des Fadens; Seitenbewegungen, die die ganze Röhre ausfüllen: turbulente Strömung

Reynolds betrachtete diese Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt eines „Ähnlichkeitsgesetzes":

Vergleich zweier Anordnungen, die sich nur in den Maßeinheiten (Skalen) unterscheiden, bzw.

2 Röhren mit unterschiedlichen Radien R_1, R_2.

Wie ändert sich die Navier-Stokes-Gleichung beim Übergang vom System 1 zum System 2?

$R_2 = \alpha R_1 \Rightarrow$ α ist die Skala für die Änderung aller Längeneinheiten, d.h.

$x_2 = \alpha x_1,\ y_2 = \alpha y_1,\ z_2 = \alpha z_1$, für zwei „korrespondierende Punkte" in den Röhren.

Mittlere Geschwindigkeiten in ①, ②:

v_1, v_2: $v_2 = \beta v_1$; wegen $[v] = \frac{m}{s}$ legt $\frac{\alpha}{\beta}$ die Änderung der Zeiteinheit fest:

$$t_2 = \frac{\alpha}{\beta} t_1.$$

Die Röhren können mit Fluiden verschiedener Dichte und Viskosität gefüllt sein:

$\rho_2 = \gamma \rho_1$; $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

$\Rightarrow \gamma \cdot \alpha^3$ legt die Änderung der Masseneinheit fest,

$m_2 = \gamma \alpha^3 m_1$

Mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$,

$\nu_2 = \delta \nu_1$

sowie den Drücken in korrespondierenden Querschnitten,

$p_2 = \varepsilon p_1$ (ε lässt sich auch durch α, β, γ ausdrücken!)

$\Rightarrow$ Transformation der Navier-Stokes Gl.

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = 0}$$ beim Übergang $1 \to 2$

$\left[\frac{v}{t}\right] \quad \left[\frac{v^2}{s}\right] : \frac{m}{s^2}$

1) Der Beschleunigungsterm ändert sich beim Übergang $1 \to 2$ wegen $R_2 = \alpha R_1$, $v_2 = \beta v_2$ um $\boxed{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.

2) Der Zähigkeitsterm ändert sich wegen $v_2 = \beta v_1$, $\nu_2 = \delta \nu_1$ um $\boxed{\delta \frac{\beta}{\alpha^2}}$,

3) Der Druckterm wird geändert um $R_2 = \alpha R_1$, $\rho_2 = \gamma \rho_1$, $P_2 = \varepsilon P_1$: $\boxed{\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{\alpha}}$

Soll die NSG für beide Anordnungen 1, 2 erfüllt sein, muss das Verhältnis dieser 3 Faktoren gleich 1 sein:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} : \delta\frac{\beta}{\alpha^2} : \frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{\alpha} = 1 : 1 : 1$$

$$\Rightarrow \frac{\beta\alpha}{\delta} = 1 \wedge \frac{\varepsilon}{\gamma\beta^2} = 1$$

$$\hat{=} \boxed{\frac{v_1 R_1}{\nu_1} = \frac{v_2 R_2}{\nu_2}}, \quad \boxed{\frac{P_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{P_2}{\rho_2 v_2^2}}$$

Ergebnis der Reynoldsschen Ähnlichkeitstheorie (1883)

In der Literatur wird meist nur die erste Gleichung als Reynoldssches Kriterium bezeichnet (obwohl die zweite für ein hinreichendes Kriterium dazugehört)

$\Rightarrow$ ist (1) laminar, so auch (2)
" (1) turbulent, " " (2).

Die dadurch definierte dimensionslose Zahl ist die Reynoldssche Zahl,

$$\boxed{Re = \frac{vR}{\nu} \equiv \frac{\rho v R}{\eta}} = \frac{\text{Konvektion}}{\text{Viskosität}} \sim \frac{\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}}{\eta \Delta \vec{v}}$$

wobei R - je nach Versuchsanordnung - eine räumliche Abmessung ist (nicht notwendigerweise ein Radius).

Die durch die 2. Bedingung definierte Zahl ist

$$\boxed{S = \frac{p}{\rho v^2}}$$

Das Umschlagen von laminarer in turbulente Strömung ist ein für beide Rohren (1) und (2) ähnlicher Vorgang, der durch denselben Zahlenwert von Re gekennzeichnet wird, die kritische Reynoldssche Zahl $(R \to \ell)$

$$\boxed{Re_{krit} = \left(\frac{\rho v \ell}{\eta}\right)_{krit}}$$

Für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit}

$\Rightarrow$ Re_{krit} ist keine universelle Größe.

Der Wert von Re hängt auch von der Art des Zuflusses zum Rohr ab. Bei trompetenförmigem Einlauf  ist die Strömung anfangs laminar, und bleibt es bei großem Re.

Bei „scharfem" Einlauf $\Rightarrow$ ist die Anfangsströmung durch Seitenkomponenten gestört, und der Umschlag zur Turbulenz findet bei relativ niedrigem Re statt:

$Re_{krit} \simeq 1200$, unregelmäßiger Einlauf
$Re_{krit} \simeq 20\,000$, gut abgerundeter " } im Glasrohr

$\Rightarrow$ Konstanz der kritischen Reynoldszahl nur bei Strömungen mit ähnlichen Anfangsbedingungen.

Wie kommt der Umschlag laminar/turbulent zustande?

Bisher scheint die Hagen-Poiseuille-Strömung stets eine mögliche Strömungsform zu sein – aber für $Re > Re_{krit}$ ist sie nicht mehr stabil.

- Die Viskosität wirkt auf die Beruhigung von Seitenbewegungen hin, und begünstigt laminares Verhalten
- Die Trägheit verlangt die Erhaltung der Seitenkomponenten, wirkt also zugunsten der Turbulenz

(zeigt sich in $\nu = \frac{\eta}{\rho}$: vergrößere $\eta \Rightarrow$ großes $\bar{v} \cdot l$, um gleiches Re zu erreichen $\Rightarrow$ laminar

vergrößere $\rho \Rightarrow$ kleines $\bar{v} \cdot l \Rightarrow$ turbulent)

Die Stabilität der laminaren Strömung läßt sich steigern, indem man Seitenbewegungen beim Einlauf durch Abrundung verhindert.

3.5 Strömungen mit kleinem Re: Stokessche Formel

Für $Re \ll 1$ vereinfacht sich die Navier-Stokes-Gleichung stark.

Bei stationärer Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\boxed{(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}}$$

Die Reynolds-Zahl gibt i.w. das Verhältnis von konvektivem zu dissipativem Anteil wieder:

$$\frac{\rho\,(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}}{\eta\,\Delta\vec{v}} \sim Re,$$

so dass für $Re \ll 1$ der konvektive Anteil vernachlässigbar ist, und die Bewegungsgleichung linear wird (daraus hatten wir die Poiseuille-Strömung berechnet),

$$\boxed{\eta\,\Delta\vec{v} - \vec{\nabla}p = 0}$$

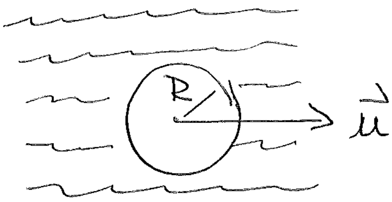
und mit der Kontinuitätsgleichung die Strömung vollständig bestimmt ist, $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$.

Durch Bilden der Rotation folgt:

$$\boxed{\Delta\,(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0}$$

Daraus hat G.G. Stokes 1851 seine Formel für die Widerstandskraft auf eine bewegte Kugel mit Radius R in einer viskosen Flüssigkeit abgeleitet.
[hier jedoch ohne Ableitung]

⇒ <u>Stokessche Formel</u> für die Widerstandskraft auf eine langsam im Fluid bewegte Kugel (Strömungswiderstand)



$$\boxed{\vec F = -6\pi R \eta \vec u}$$

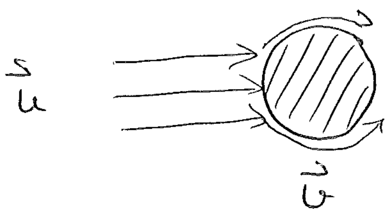
$\vec u$ = Geschwindigkeit der Kugel

$F \propto R, \eta, u$; $\vec F \uparrow\downarrow \vec u$

Für Körper anderer Form stimmt die <u>Richtung</u> der Widerstandskraft i.a. <u>nicht</u> mit derjenigen der Geschwindigkeit überein; der Widerstand hängt aber auch von u und den Abmessungen ab.

allg. Ergebnis: $F = \frac{3\eta u}{2R} \oint df$; Kugel: $\oint df = 4\pi R^2$ ⇒ Stokes.

Die <u>Stokessche Lösung</u> des Strömungsproblems ist äquivalent zur Umströmung einer festen Kugel in einem Flüssigkeitsstrom, der im Unendlichen die Geschwindigkeit $\vec u$ hat; das $\vec v$-Feld in der Nähe der Kugel erlaubt dann die Stokessche Lösung:



Für genügend große Entfernungen von der Kugel ist die Stokessche Lösung jedoch <u>nicht</u> anwendbar trotz $Re \ll 1$.

Dort wird $\vec v \simeq \vec u$; das Konvektionsglied $(\vec v \vec\nabla)\vec v$ muss berücksichtigt werden. Eine Näherungslösung gelang C.W. Oseen (1910):

Oseensche Gleichung

als Verbesserung der Stokesschen Formel für große Entfernungen von der Kugel $r \gg R$:

durch Linearisierung des Konvektionsglieder in der Form $(\vec{v}\vec{\nabla}) \to (\vec{u}\vec{\nabla})$, so dass

$$\boxed{(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v}}$$

C. W. Oseen*, 1910 $\quad \vec{v}(\vec{u})!$

Mit der daraus erhaltenen Geschwindigkeitsverteilung $(\vec{v})$ folgt eine genauere Formel für den Strömungswiderstand (gegen $\vec{u}$).

Als nächstes Glied der Entwicklung des Widerstands nach der Reynolds-Zahl $Re = \frac{u \cdot l}{\nu}$ erhält man

(s. H. Lamb, „Hydrodynamics", Cambridge 1924)

$$\boxed{\vec{F} = -6\pi\eta\vec{u}R\left(1 + \frac{3Re}{8}\right)}$$

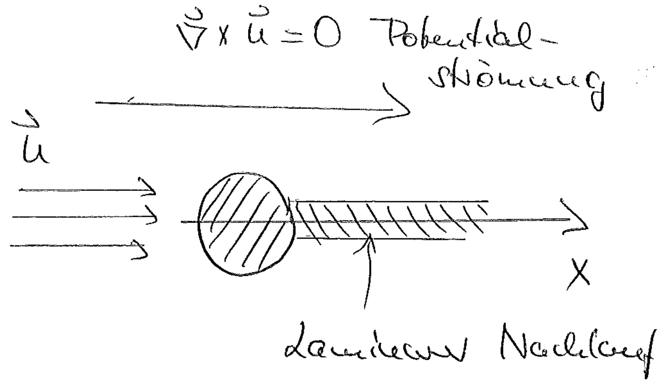
Für kleine Entfernungen $l \sim R$ ergibt dies nur eine sehr geringfügige Verbesserung der Stokesschen Formel, aber für $l \gg R$ wird der Unterschied merklich.

---

* C. W. Oseen (*1879 Lund – 1944 Uppsala; Direktor des Nobel-Instituts in Stockholm)

3.6 Laminarer Nachlauf

Die Strömung einer zähen Flüssigkeit um einen festen Körper wird in großen Entfernungen hinter dem Körper unabhängig von seiner Gestalt.



Die "wahre" Strömungsgeschwindigkeit sei $\vec{u} + \vec{v}$; für $\vec{v} = -\vec{u}$ Stillstand, keine Strömung.

Für große Entfernungen hinter dem Körper ist $\vec{v}$ nur im schmalen Band des laminaren Nachlaufs von 0 verschieden.

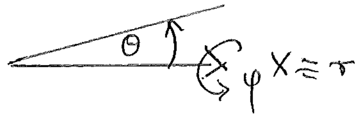
Außer im Nachlauf kann die Strömung überall als Potentialströmung angesehen werden ($\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$) (wie bei einer idealen Flüssigkeit), da der Einfluß von η auf Stromlinien, die in genügend großer Entfernung am Körper vorbeigehen, unbedeutend ist: die Viskosität η wirkt nur am umströmten Körper, und im Nachlauf.

$\Rightarrow$ Problem: Wie hängt die Strömung im Nachlauf mit den Kräften auf den umströmten Körper zusammen?

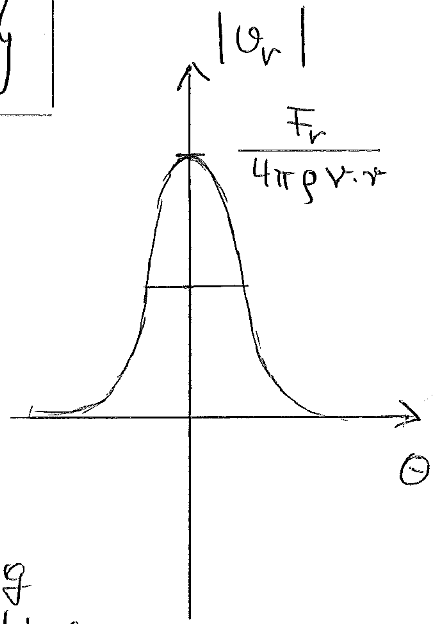
$\Rightarrow$ NSG für stationäre Strömung in Oseenscher Näherung anwenden:

$$\boxed{(\vec{u}\,\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\vec{\nabla}\,\frac{p}{\rho} + \nu\,\Delta\vec{v}}$$

Die Lösung im Nachlauf ergibt in Kugelkoordinaten in genügend großer Entfernung $r \gg R$ vom Körper (Probe durch Einsetzen!)



$$\boxed{v_r(\Theta) = -\frac{F_r}{4\pi\rho \cdot \nu \cdot r}\exp\left\{-\frac{u \cdot r \cdot \Theta^2}{4\nu}\right\}}$$



Das Ergebnis ist negativ, denn die Strömung ist im Nachlauf langsamer als in Abwesenheit des Körpers (wahre Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}+\vec{v}$)

Außerhalb des Nachlaufs ist die Strömung eine reine Potentialströmung; das Potential ϕ ergibt sich durch Lösen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0 \quad , \quad \vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$$

für das Geschwindigkeitspotential,

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\rho u r}\left[-F_x + F_y \cos\varphi \cot\frac{\Theta}{2}\right]}$$

d.h. $\phi \propto \frac{1}{r}$, $v \propto \frac{1}{r^2}$

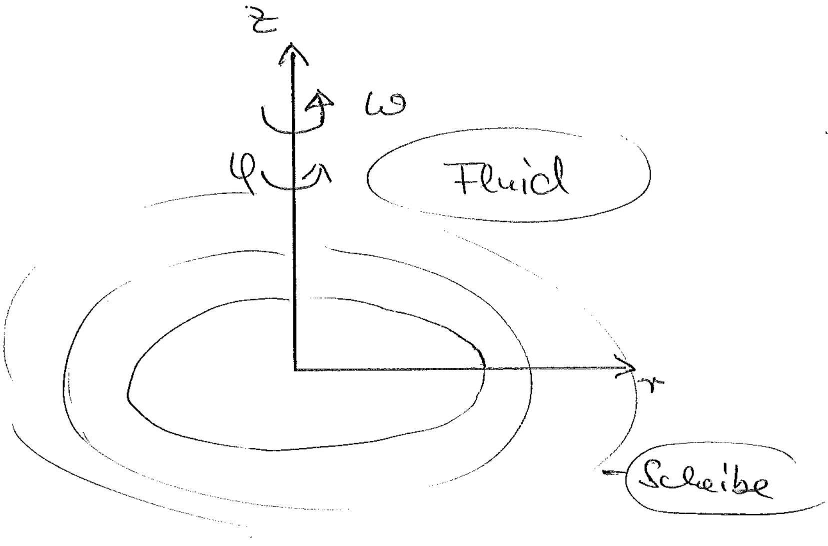
Sofern kein Auftrieb (Gravitationsfeld) vorhanden ist, bleibt die Strömung außerhalb des Nachlaufs axialsymmetrisch.

3.7 Beispiel exakte Lösung: Rotierende Scheibe

Exakte Lösungen von NSG und Kontinuitätsgleichung sind nur in wenigen Fällen möglich. Damit sie physikalisch interessant sind, müssen sie die Gleichungen erfüllen und stabil sein: wachsen kleine Störungen zeitlich an, wird die Strömung instabil, es entsteht Turbulenz.

Beispiel für eine stabile Lösung: Rotierende Scheibe

(Th. v. Kármán 1921)



Eine ∞ ausgedehnte Scheibe rotiert in einer viskosen Flüssigkeit gleichförmig um die z-Achse und versetzt die Flüssigkeit in Bewegung.

Randbedingungen: Die Strömung des Fluids soll berechnet werden (Zylinderkoord. r, φ, z)

$z=0: v_r = 0, \; v_\varphi = \omega r, \; v_z = 0$

$z=\infty: v_r = 0, \; v_\varphi = 0$; es ist $v_z \neq 0$ für $z \to \infty$ ($v_z \to -\text{const}$, die Konstante wird aus den Bewegungsgleichungen bestimmt.)

Das Fluid strebt radial von der Rotationsachse weg, v.a. in der Nähe der Scheibe. Zur Sicherung der Kontinuität ($\equiv$ Massenerhaltung) in der Flüssigkeit muss deshalb ein konstanter vertikaler Strom aus dem Unendlichen zur Scheibe hin existieren.

Man sucht Lösungen der Bewegungsgleichung in der Form

$$v_r = r\omega F(z_1), \quad v_\varphi = r\omega G(z_1), \quad v_z = \sqrt{\nu\cdot\omega}\, H(z_1)$$

$$p = -\rho\cdot\nu\cdot\omega\, P(z_1) \quad \text{mit} \quad z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, z \quad : \quad [\sqrt{\nu\cdot\omega}] = \sqrt{\frac{m^2}{s}\cdot\frac{1}{s}} = \frac{m}{s} \checkmark$$

die radiale und φ-Komponente der Geschwindigkeit sind prop. zum Abstand r von der Drehachse der Scheibe, während die vertikale Geschwindigkeit v_z in jeder horizontalen Ebene konstant ist.

Einsetzen in die NSG ergibt für die 3 Komponenten (mit $' \equiv \frac{d}{dz_1}$):

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad F^2 - G^2 + F'H = F''$$

$$2FG + G'H = G''$$

$$HH' = P' + H''$$

Die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$ ergibt

$$\Rightarrow \quad 2F + H' = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$= 2\omega F + \sqrt{\nu\cdot\omega}\cdot\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\cdot H' \quad \frac{\partial z_1}{\partial z}$$

$$= 2\omega F + \omega H' = 0$$

Die Randbedingungen werden

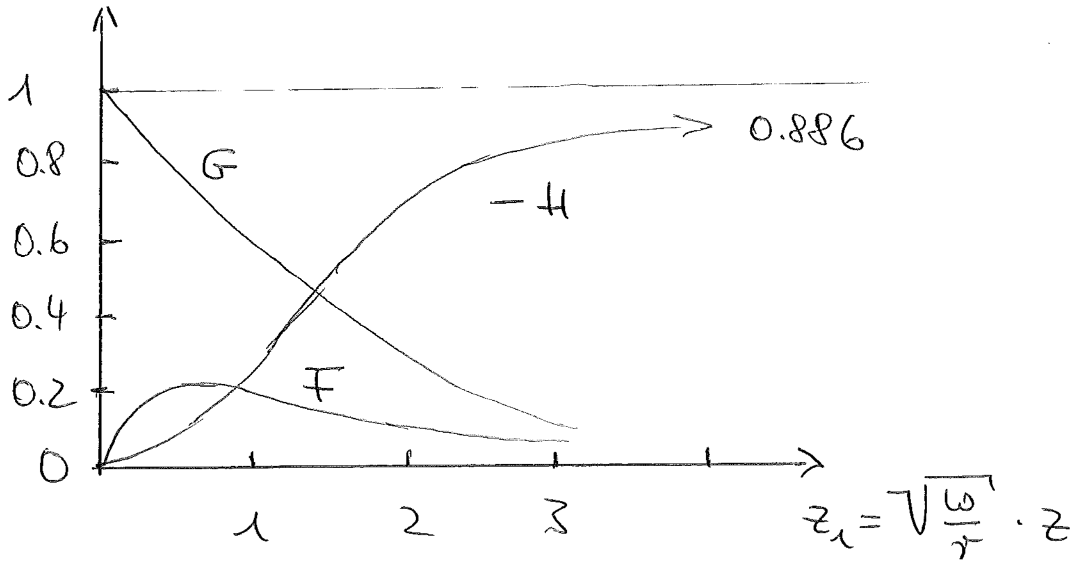
$$z_1 = 0: \quad F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0$$

$$z_1 = \infty: \quad F = 0, \quad G = 0$$

$\Rightarrow$ die Lösung ist auf die Integration eines Systems von 4 gewöhnlichen DGLn mit einer Veränderlichen zurückgeführt; sie kann numerisch erfolgen.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsströmung aus dem Unendlichen zur Scheibe hin ist

$$v_z(\infty) = \sqrt{\nu\cdot\omega}\; H(z_1 \to \infty) = -0.886\sqrt{\nu\cdot\omega}$$



Die Reibungskraft auf die Scheibe ⊥ zum Radius pro Flächeneinheit ist

$$\sigma_{z\varphi} = \eta\left(\frac{\partial w_\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \eta r\omega \left.\frac{\partial G(z_1)}{\partial z}\right|_{z=0} = \eta\cdot r\cdot\omega \left.\frac{\partial z_1}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} =$$

$$= \eta r\omega\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, G'(0) = \nu\cdot\rho\cdot r\cdot\omega\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, G'(0) =$$

$$= \underline{r\cdot\rho\sqrt{\nu\omega^3}\, G'(0)}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_{z\varphi} \propto \rho,\ \sqrt{\nu\cdot\omega^3}}$$

Bei Vernachlässigung der Randeffekte an der Scheibe können wir für eine große, aber endliche Scheibe (Radius R) das Drehmoment der Reibungskräfte schreiben als (für 2 Seiten der Scheibe: 2x)

$$M = 2\cdot\int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi}\, dr = \pi R^4 \rho\sqrt{\nu\omega^3}\, G'(0)\ ;\ \text{numerisch} \Rightarrow$$

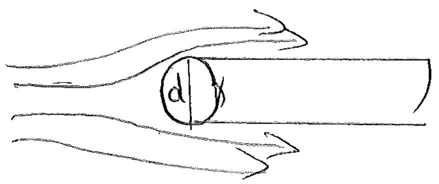
$$\boxed{M = -1.94\, R^4 \rho\sqrt{\nu\omega^3}}$$ Drehmoment der Reibungskräfte auf die Scheibe, $M \propto R^4, \rho, \sqrt{\nu}$

4. Turbulenz

4.1 Übergang zur Turbulenz, doppelte Schwelle.

Laminare Strömungen eines viskosen Fluids werden für große Reynoldszahlen $Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} > Re_{krit}$ i.a. instabil gegenüber infinitesimalen Störungen: die Störung klingt nicht mit der Zeit ab, sondern wächst an, die Strömung wird turbulent.

Für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit}; z.B. bei der Strömung um feste Körper:



hier ist i.a. $10 \lesssim Re_{krit} \lesssim 100$.

Im turbulenten Fall lässt sich die NSG mit einer turbulenzerzeugenden Kraft $\vec{f}$ schreiben als

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}}$$

Analytische Lösungen im turbulenten Fall gibt es nicht, und sie wären auch wenig sinnvoll, da man jetzt an statistischen Mittelwerten interessiert ist: für die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$, die mittlere quadratische Geschwindigkeit $\langle v^2 \rangle$, die mittlere dissipierte Energie $\langle E_d \rangle$ (pro Zeit- und Masseneinheit), etc. In manchen Fällen lassen sie sich näherungsweise berechnen, insbes. bei „entwickelter Turbulenz" (= voll turbulente Strömung), dem ersten Beispiel der Einführung der Renormierungsgruppe (C.v. Weizsäcker 1948)

So fand man für die mittlere quadratische Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes vom Wirbelzentrum (analog für die Wirbelenergie $\langle E\rangle \sim \langle v^2\rangle$)

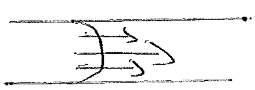
$\boxed{\langle v^2\rangle (r) \propto r^{2/3}}$ „Wirbelverteilungsgesetz"

(aus Renormierungsansatz für selbstähnliche Strukturen) ← C.F. v. Weizsäcker, Z. Physik 124, 614 (1948)
W. Heisenberg, Z. Physik 124, 628 (1948)

Der exakte Wert des Exponenten ist bis heute nicht berechenbar (man findet empirisch kleine Abweichungen von 2/3), da auch die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen statistisch fluktuieren.

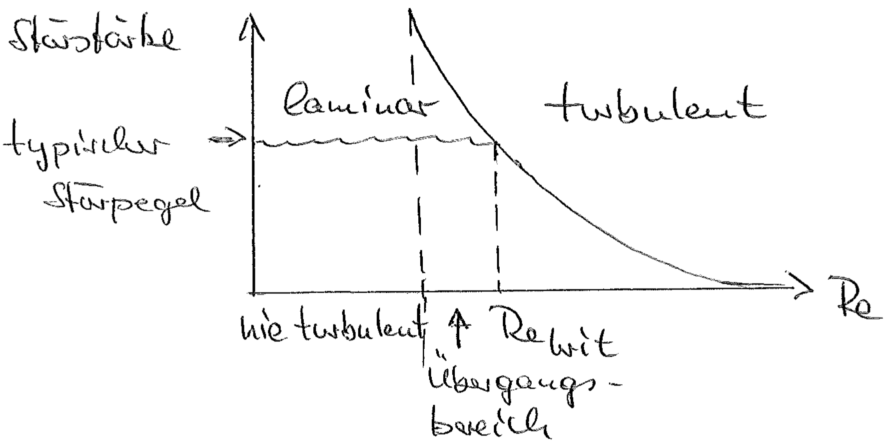
Das Einsetzen der Turbulenz bei großen Reynoldszahlen hat Landau 1944 über eine unendliche Folge von Instabilitäten und räumlich und zeitlich immer unregelmäßigere Strömungsmuster beschrieben.

Bei manchen Strömungstypen wie der Rohrströmung



gibt es jedoch keine Instabilität, wohl aber Turbulenz. Sie setzt abrupt und stark ein; dazu ist eine endliche Störung des laminaren Profils erforderlich (nicht nur eine infinitesimale Störung, die sich „aufschaukelt")

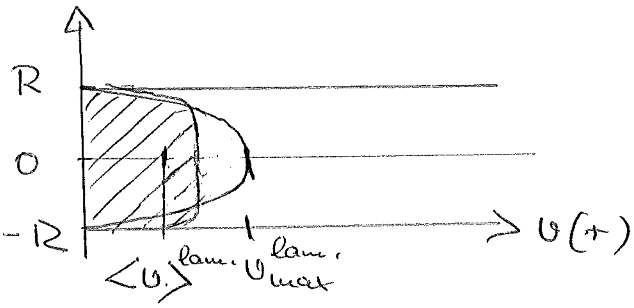
⇒ hier gibt es für den Turbulenzeinsatz eine doppelte Schwelle: sowohl die Reynoldszahl, als auch die Störung, müssen groß genug sein:



Ist die Strömung turbulent geworden, hat sie viele Freiheitsgrade und hochdimensionalen Phasenraum (s. slide "Wasserstrahl")

Das Profil der turbulenten Strömung ist wesentlich durch die Nichtlinearität im konvektiven Term bestimmt, während bei der laminaren Strömung die Viskosität entscheidend ist.

Beispiel Rohrströmung:



Laminar: Poiseuille-Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil,

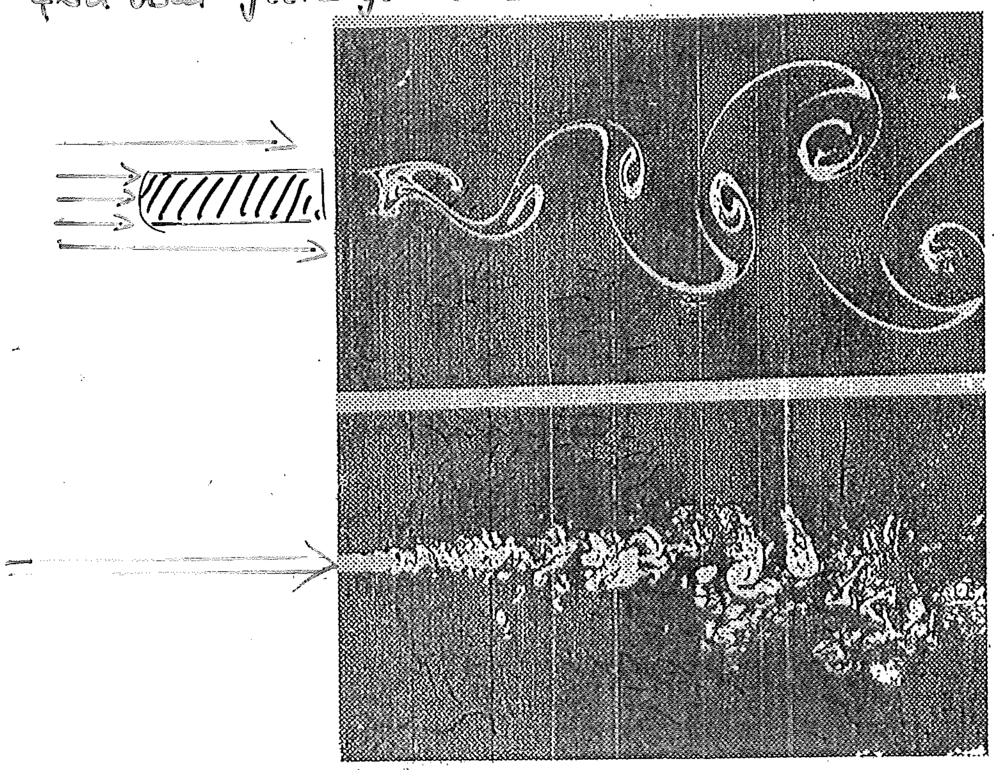
$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$v_{max}^{lam.}(r=0) = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2 = 2\langle v \rangle$$

$$\left(\langle v \rangle^{lam.} = \frac{\int_0^R r\, v(r)\, dr}{\int r\, dr} = \frac{\Delta P}{8\eta l} R^2 \right)$$

Folgen der Nichtlinearität

Ordnung u. Struktur in offenen, dissipativen Systemen fern vom Gleichgewicht



Kármánsche Wirbelstraße
Re = 140

Wasserstrahl strömt in Wasser und zerfällt turbulent
Re ≈ 2300

Vielskaligkeit: Gleichartige Muster bilden sich in verschiedensten Größen ineinandergeschachtelt aus.

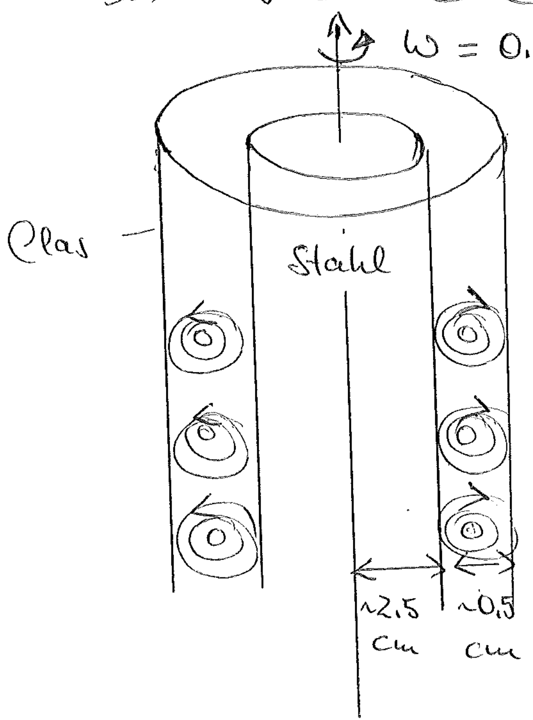
Im turbulenten Fall muss die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit betrachtet werden; die individuelle Fluidteilchen-Geschwindigkeiten variieren stark.
Die Strömung hat kein parabolisches Profil mehr, es ist etwa „eckig" mit einem Maximalwert für $r=0$ (in der Rohrmitte) etwas über dem Mittelwert der laminaren Strömung. Erst dicht am Rand fällt sie steil auf 0 ab; es bildet sich eine schmale Randzone aus, in der die Strömung durch Viskosität dominiert, und fast laminar ist.

Ohne makroskopische Störung setzt Turbulenz über infinitesimale Instabilitäten ein:

4.2 Turbulenzeinsatz über Instabilität

dazu zwei Beispiele:

a) Taylor-Couette-Instabilität (1923)



Wasserströmung im Spalt zwischen einem rotierenden Innenzylinder, und einem fest stehenden, konzentrischen Aussenzylinder.

Bei langsamer Drehung ist sie laminar, bei schneller Drehung gibt es regelmäßige Schlauchmuster, bei sehr schneller Drehung wird sie wellig turbulent.

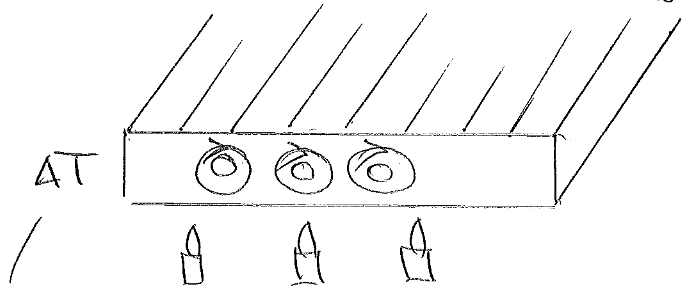
⇒ Die viskose Flüssigkeit haftet am rotierenden inneren, und am ruhenden äußeren Zylinder: es gibt ein Gefälle der azimutalen Geschwindigkeit $u_\varphi(r)$ von innen nach außen, und infolgedessen ein Gefälle der Zentrifugalkräfte. Wird es hinreichend groß, kommt es zu einer Zentrifugal-instabilität. (Eine zusätzliche (makroskop.) Störung gibt es hier nicht).

Dreht sich auch der äußere Zylinder, sollte die Strömung laminar bleiben, weil $u_\varphi(r)$ mit r anwächst, so dass auch die Druckkraft anwächst und infinitesimale Störungen zurücktreibt.

Jedoch: bei hinreichend großem ω wird die Strömung dennoch turbulent; es muss demnach auch hier eine weitere Ursache geben.

b) Rayleigh-Bénard-Zelle
(1916) (1920)

als weiteres Beispiel für hydrodynamische Instabilität: der Auftrieb durch Wärmeausbreitung resultiert in Konvektionsrollen, dann in Turbulenz:



Temperaturdifferenz unten/oben

Eine Flüssigkeitsschicht im Schwerefeld $\vec{g}$ wird von unten um ΔT (einige Grad) erwärmt

ΔT klein: die molekulare Leitfähigkeit schafft den Wärmetransport

ΔT mittel: Ausbildung regelmäßiger Konvektionsrollen

ΔT groß: Turbulenz.

Die Konvektionsrollen sind die erste Instabilität; sie entsteht, wenn ein Paar komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse kreuzt (s. später; Hopf-Bifurkation).

Das beim Zerfall der Konvektionsrollen entstehende neue Muster ist nicht zeitunabhängig, sondern periodisch mit der Frequenz f_1. Wird ΔT (oder ω oder Re) weiter erhöht, bleibt auch das neue Muster nicht stabil: es folgt die dritte Instabilität, anschliessend gibt es zwei Frequenzen f_1, f_2 (und wegen der Nichtlinearität alle ihre Mischungen),

Bei der vierten Instabilität kommt nicht einfach eine weitere Frequenz hinzu, sondern das Spektrum wird kontinuierlich, und das Strömungsfeld zeitlich chaotisch. (D. Ruelle u. F. Takens, 1971).
[Beachte: Chaos und Turbulenz sind dennoch nicht synonym, da wichtige Gegenbeispiele nicht diesem Weg folgen.]

Der Ruelle-Takens-Weg ins hydrodynamische Chaos hat zahlreiche exp. Bestätigungen gefunden; es gibt dabei 3 Grundmuster für den Weg ins Chaos über Instabilitäten

(≡ nicht durch die gleiche Zahl ohne Rest teilbar)

1) Quasiperiodischer Weg: f_1, f_2 inkommensurabel
2) Periodenverdopplung: f_1, f_2 fest verknüpft
3) Intermittenz: intermittierendes Eintreten eines neuen Musters.

Alle 3 Wege lassen sich je nach Randbed. bei Rayleigh-Bénard nachweisen.

4.3 Stabilität stationärer Strömungen

Nicht jede Lösung der NSG für die Bewegung eines zähen Fluids ist in der Natur realisiert, denn sie muss auch stabil sein, d.h. kleine Störungen müssen mit der Zeit abklingen.

Mathematische Stabilitätsuntersuchung: (L. Landau)

Sei $\vec{v}_0(\vec{r})$ die stationäre Lösung

$\vec{v}_1(\vec{r},t)$ eine kleine, nicht stationäre Störung

$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1}$ mit $p = p_0 + p_1$ erfüllen NSG, KG:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}$$

$$\vec{\nabla}\vec{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Für den stationären Anteil mit $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = 0$:

$$(\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla}p_0}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}_0$$

$$\vec{\nabla}\vec{v}_0 = 0$$

und für den gestörten Anteil (Terme höherer Ordnung in $\vec{v}_1$ werden wg. $|\vec{v}_1| \ll |\vec{v}_0|$ weggelassen):

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}_1 + (\vec{v}_1\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla}p_1}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}_1$$

linear in $\vec{v}_1$

$$\vec{\nabla}\vec{v}_1 = 0$$

plus die Randbedingung $\vec{v}_1 = 0$ an unbeweglichen festen Wänden

⇒ $\vec{v}_1$ genügt einem System homogener DGLs mit Koeffizienten, die nur Funktionen des Ortes sind und nicht von der Zeit abhängen.

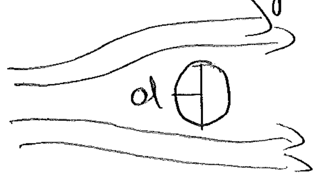
⇒ <u>Die allgemeine Lösung</u> ist eine Summe spezieller Lösungen, in denen $\vec{v}_1$ über einen Faktor $\vec{v}_1(t) \propto e^{-i\omega t}$ von der Zeit abhängt. Die <u>Frequenzen</u> ω sind durch die Lösungen mit Randbedingungen bestimmt; sie sind komplex: $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$.

Für <u>positiven Imaginärteil</u> $\gamma_1 > 0$ wächst $e^{-i\omega t}$ unbeschränkt mit t ⇒
die Strömung <u>wird instabil</u>

⇒ Stabile Strömung $\Leftrightarrow$ $\gamma_1 = \mathrm{Im}(\omega) < 0 \quad \forall \omega$.

Die zugehörige mathematische <u>Stabilitätsuntersuchung</u> ist kompliziert, und bei stationären Strömungen um Körper mit endlichen Abmessungen bisher nicht gelöst.

Jedenfalls wird die Strömung für $Re > Re_{krit}$ instabil gegenüber infinitesimalen Störungen; für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit}, z.B. bei Strömungen um feste Körper: $10 \leq Re_{krit} \leq 100$, s.o.



$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}, \quad Re_{krit} \simeq 30$$

$\Rightarrow$ Für

$Re < Re_{krit}$ $\wedge$ Störfrequenzen $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ mit $\gamma_1 < 0$:

Stabile Strömung

$Re = Re_{krit}$: $\exists\ \omega$ mit $\gamma_1 = 0$, $\gamma_1(Re_{krit}) = 0$

$Re > Re_{krit}$ $\wedge$ $\gamma_1 > 0$ (mit $\gamma_1 \ll \omega_1$ bei $Re \simeq Re_{krit}$):

Turbulente Strömung

Beim Umströmen eines endlichen Körpers gibt es nur diskrete Frequenzen mit $\gamma_1 > 0$, keine kontinuierlichen.

Nichtstationäre Bewegung bei großem $Re > Re_{krit}$ in der Beschreibung von L. Landau 1944:

Ansatz für das Störfeld $\vec{v}_1$:

$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = A(t)\,\vec{f}(\vec{r})$ mit komplexer Ortsfunktion $\vec{f}$, und komplexer Amplitude $A(t)$:

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{-i\omega t} = \text{const}\ e^{\gamma_1 t} \cdot e^{-i\omega_1 t} \quad \underset{t \gtrsim 0}{\text{anfangs,}}$$

Wie entwickelt sich die Amplitude $|A(t)|$ des Störfeldes zeitlich?

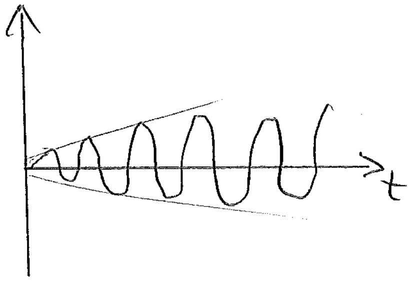
Für $Re \gtrsim Re_{krit}$ strebt die Amplitude des Störfeldes gegen einen endlichen Grenzwert, der sich wie folgt abschätzen lässt:

Zu kleinen Zeiten ist $|A|^2 = const^2 e^{2\gamma_1 t} \underbrace{|e^{-i\omega_1 t} \cdot e^{+i\omega_1 t}|}_{=1}$

Die zeitliche Änderung des Betragsquadrats der Amplitude wird für kleine Zeiten:

$$\boxed{\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2}$$

Für größere Zeiten gibt es jedoch Abweichungen von der anfänglichen Amplitudenform; in einer Reihenentwicklung kommen weitere Glieder hinzu.



Es interessiert der zeitliche Mittelwert; die Glieder 3. Ordnung enthalten einen periodischen Faktor, der bei Zeitmittelung $\langle |A| \rangle_t$ Null ergibt.

$\Rightarrow$ Bis zu Gliedern 4. Ordnung folgt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4}$$

α = Landausche Konstante (pos. oder neg.!)

Lösung:

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + const \cdot e^{-2\gamma_1 t}$$

(Prüfen durch Einsetzen)

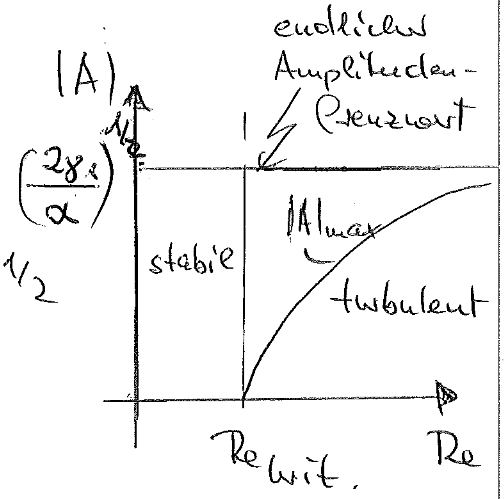
$\Rightarrow$ $|A|^2$ strebt für $t \to \infty$ asymptotisch gegen den endlichen Grenzwert

$$\boxed{|A|^2_{max} = \frac{2\gamma_1}{\alpha}}$$

γ_1 ist dabei eine Funktion der Reynoldszahl, mit $\gamma_1(Re_{krit}) = 0$. Sie lässt sich in der Nähe von R_{krit} in eine Potenzreihe entwickeln; in erster Näherung ist

$$\gamma_1 = const\,(Re - Re_{krit})$$

$$\Rightarrow |A|_{max} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot const}{\alpha}}\,(Re - Re_{krit})^{1/2}$$



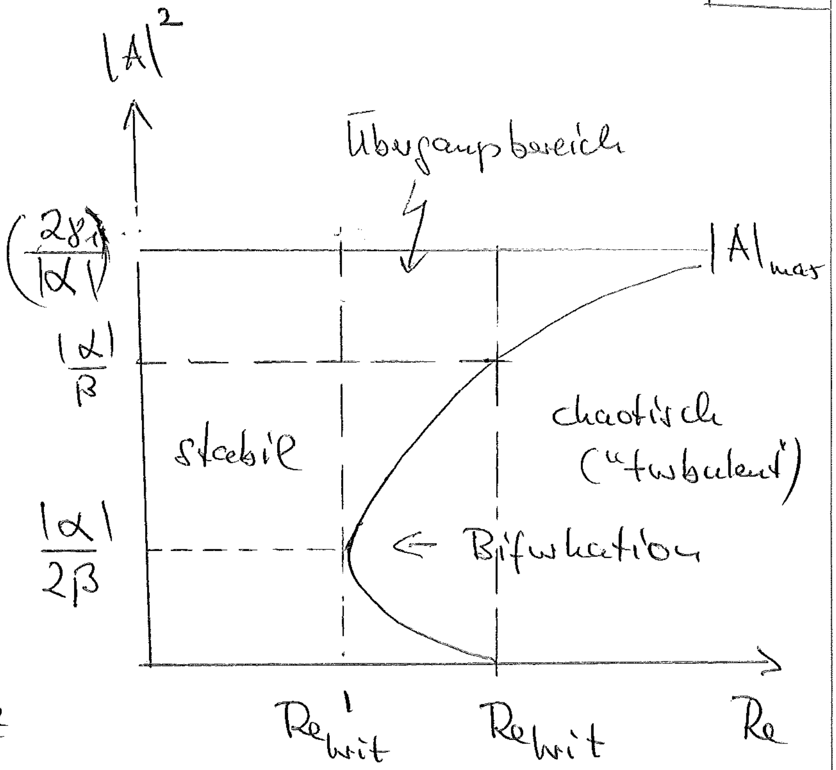
Bei Berücksichtigung eines weiteren Gliedes in der Entwicklung:

- Die 5. Ordnung fällt bei Zeitmittelung analog zur 3. Ordnung weg:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6}, \quad \beta > 0, \ \alpha < 0$$

<u>Lösung</u> (Prüfen durch Einsetzen): für $t \to \infty$

$$|A|^2_{max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta}\gamma_1\right]^{1/2}$$



Bei $Re = Re_{krit}$ nimmt das System sprunghaft eine endliche Amplitude an, $|A| = |\alpha|/\beta$.

Bei $Re'_{krit} < Re < Re_{krit}$ gibt es eine metastabile Grundströmung, die stabil gegenüber sehr kleinen Störungen ist $\left(|A| < \frac{|\alpha|}{2\beta}\right)$ – sie klingen im Laufe der Zeit ab –, aber instabil gegenüber Störungen mit endlicher Amplitude $|A| > \frac{\alpha}{2\beta}$.

Für $Re < Re'_{krit}$ ist die Strömung stabil, für $Re > Re_{krit}$ gibt es keine stabile Strömung.

Die Phase des Störfeldes $A(t)$ bleibt unbestimmt, sie hängt von den zufälligen Anfangsbedingungen ab. Dadurch erhält die Strömung einen Freiheitsgrad, während die stationäre (stabile) Strömung durch die äußeren Bedingungen vollständig bestimmt ist.

4.4 Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen

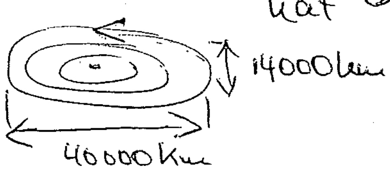
Turbulenz erscheint auf sehr unterschiedlichen Skalen, vom Labor bis in den größten Strukturen im Universum. Voraussetzung ist nur die Gegenwart eines kontinuierlichen, fluid-ähnlichen Mediums.
Turbulenz ist eine der wichtigsten (und häufigsten) Naturerscheinungen; dennoch sind wir von einem tiefen Verständnis weit entfernt. Beispiele für entwickelte Turbulenz:

Planeten: Turbulenz essentiell beim Strukturieren der Atmosphäre; zum Wärme- und Impulstransport an der Oberfläche.

terrestrische Planeten: vergleichsweise kleinskalige Strukturen in der Atmosphäre, zB. Wirbelstürme, ca 1–10km Ø (s. Katrina)

große Gasplaneten (Jupiter etc): großskalige Strukturen; zB. großer Roter Fleck auf Jupiter: Zyklon, 14000km breit, 30–40000km lang, rotiert mit 6 Tagen Umlaufzeit entgegen dem Uhrzeigersinn. 1655 von G. Cassini entdeckt; hat die Jahrhunderte überlebt.

$T = 6d$



Saturn: 1990 entstandener „weißer Fleck"; Sturmzentrum in der $H/He/NH_3$-Atmosphäre, ca 20000km Ausdehnung, 10h17min Umlaufzeit

Neptun: von Voyager 2 1989 entdeckter blauer Fleck

Sternatmosphären: Turbulenz ist Bestandteil jeder Theorie über konvektiven Energietransport, mit Implikationen für die innere Struktur von Sternen

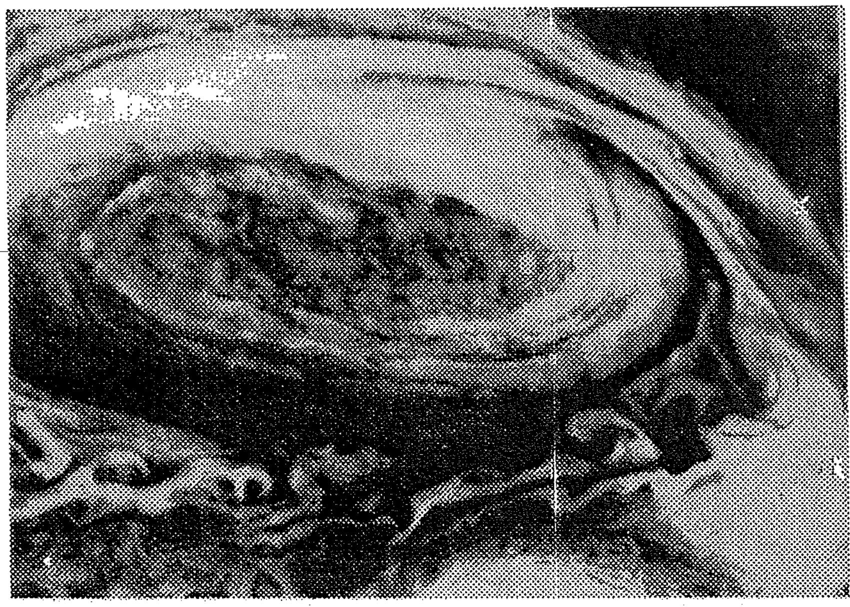
Interstellares Medium: Turbulenz in Molekülwolken spielt eine wichtige Rolle bei der Sternentstehung.

Galaxien: Turbulenz spielt eine entscheidende Rolle beim Entstehen von Galaxien-Clustern, den größten gravitativ gebundenen Objekten im Universum.

+189a

Jupiters Großer Roter Fleck

Zyklon: 14000 km breit
30-40000 km lang
6 Tage Umlaufzeit
(entgegen Uhrzeigersinn)



courtesy NASA

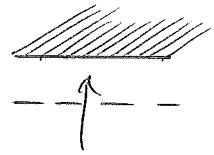
Beispiel für entwickelte Turbulenz

5. Grenzschichten

Bei sehr großen Reynoldszahlen $Re = \frac{v l}{\nu} = \frac{\rho v l}{\eta}$ – entsprechend kleinen Werten von η bzw. ν – kann das Fluid als ideal angesehen werden i.a.

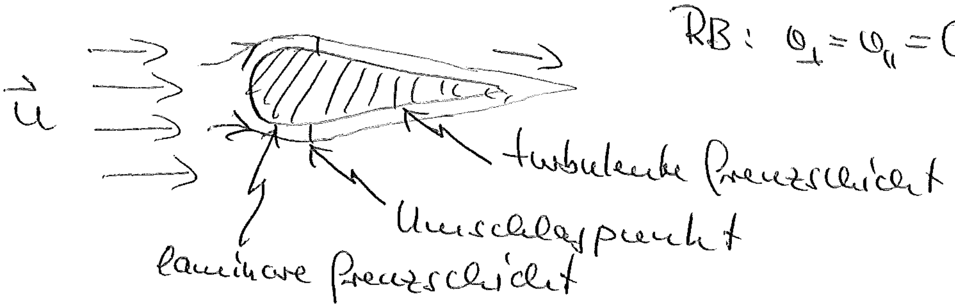
Dies gilt jedoch nicht in der Nähe fester Wände, da dort für viskose Fluide $v_\perp = v_\parallel = 0$ am Rand, beim idealen Fluid nur die Normalkomponente $v_\perp = 0$ sein muss.

Die Abnahme von $\vec{v}$ auf 0 für große Reynoldszahlen erfolgt fast vollständig in einer dünnen Fluidschicht an den Wänden, der Grenzschicht.



Hier haben die Geschwindigkeitsgradienten hohe Werte; die Strömung kann dort laminar oder turbulent sein. Die Zähigkeit verursacht den Geschwindigkeitsabfall in der Grenzschicht bis zu $\vec{v} = 0$. Der Rand der Grenzschicht ist nicht scharf.

Beispiel Stromlinienkörper:



RB: $v_\perp = v_\parallel = 0$

Dicke der Grenzschicht:

laminar:

$$\boxed{\delta_l = \frac{5 l}{\sqrt{Re}} \propto \sqrt{\nu}}$$

turbulent:

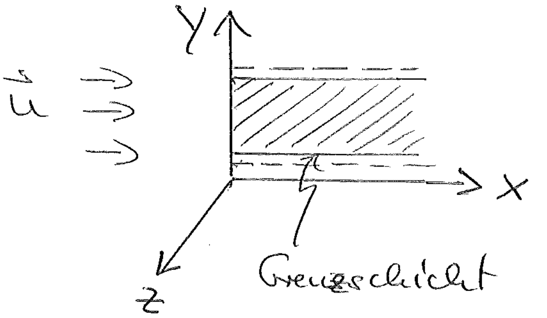
$$\delta_t = 0.37 \sqrt[5]{\nu \frac{l^4}{u}}$$

z.B.: $l = 10\,\text{cm}$ (charakt. Länge), $Re = 10^4$:

$\Rightarrow \delta_l = 0.5\,\text{cm}$

Formulierung der Theorie durch L. Prandtl 1904
(Int. Mathematiker-Kongreß Heidelberg, 1904):

Bewegungsgleichung in der Grenzschicht für eine 2dim. stationäre Strömung um ein ebenes Teilstück der Oberfläche des Körpers aus der Navier-Stokes-Gl.



Außerhalb der Grenzschicht ist die Strömung eine Potentialströmung mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ der Fremdströmung

$\Rightarrow$ dort gilt Bernoulli,

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -u\frac{du}{dx}$$

Da die Grenzschicht dünn ist, verläuft die Strömung hauptsächlich parallel zur umströmten Oberfläche,

$$v_y \ll v_x \quad ; \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$\Rightarrow$ auf die erste Komponente der NSG, und die Kontinuitätsgleichung konzentrieren, mit

$$\boxed{\begin{aligned} & v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = u \frac{du}{dx} \\ & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{aus KG}) \end{aligned}}$$

Prandtlsche Gleichungen;

vgl. S. Großmann et al., Phys. J. Okt. 2004, p.31

RB: $v_x = v_y = 0$ am Rand

6. Wärmeleitung

Mit Berücksichtigung von Viskosität und Wärmeleitung besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus NSG, Kontinuitätsgleichung, und einer 5., thermodynamischen Gleichung. Sie tritt an die Stelle der Adiabatengleichung ($\hat{=}$ Erhaltung der Entropie) bei idealen Fluiden. Wegen der irreversiblen Energie-dissipation ist bei viskosen Fluiden die Entropie nicht erhalten; vielmehr wächst sie an.

Die Änderung der Gesamtenergie in einem bestimmten Volumen pro Sekunde muss gleich dem Energiestrom durch dieses Volumen sein.

Der Energiestrom enthält jetzt außer dem "idealen" Term einen Term infolge der inneren Reibung.

Ideales Fluid:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right] = -\vec{\nabla}\underbrace{\left[\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]}_{\vec{j}_{ideal}} = -\vec{\nabla}\vec{j}_{ideal}$$

ε = innere Energie pro Masseneinheit

$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ Enthalpie pro Masseneinheit.

$\hat{=}$ Energiestrom aufgrund der Verschiebung der Flüssigkeitsmasse; dazu kommt der Energiestrom infolge innerer Reibung.

$\vec{j}\,' = -\vec{v}\sigma'$	$j'_k = -v_i\sigma'_{ik}$

Auch bei konstanter Temperatur sorgen die beiden Energietransportmechanismen für Wärmetransport.

Ist T nicht im ganzen Volumen konstant, gibt es zusätzlichen Wärmetransport durch Wärmeleitung: direkte molekulare Energieübertragung von Orten mit höherer, zu Orten mit niedrigerer Temperatur T. Sie geschieht auch in einer ruhenden Flüssigkeit*, hängt also nicht mit makroskopischer Bewegung zusammen.

* und auch in einem Festkörper

6.1 Die Wärmetransportgleichung

Sei $\vec{q}$ die Wärmestromdichte infolge Wärmeleitung; $\vec{q}$ ist eine Funktion der Temperaturänderung. Ist der Temperaturgradient klein, kann $\vec{q}$ in eine Potenzreihe nach $\vec{\nabla}T$ entwickelt werden, von der wir nur die Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigen.

Der konstante Term verschwindet, da $\vec{q} = 0$ & $\vec{\nabla}T = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{q} \simeq -\kappa \vec{\nabla} T}$$

mit κ = Wärmeleitfähigkeit⊛

$\kappa > 0$, da der Energiestrom von Orten mit hoher zu Orten mit niedriger Temperatur gerichtet ist. $\vec{q}$ und $\vec{\nabla}T$ haben entgegengesetzte Richtungen.

⊛ "thermal conductivity"

$\Rightarrow$ gesamte Energiestromdichte:

$$\vec{j}_{visc} = \underbrace{\rho\vec{v}\left[\frac{v^2}{2} + w\right]}_{\vec{j}\text{ ideal}} - \vec{v}\sigma' \underbrace{- \kappa\vec{\nabla}T}_{\vec{q}}$$

und es gilt der Energieerhaltungssatz

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right] = -\vec{\nabla}\vec{j}_{visc}} \quad (*)$$

der sich mit Hilfe der hydrodynamischen Gleichungen umformen lässt,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right] = \frac{v^2}{2}\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{aus Kont.gl.}} + \rho\vec{v}\underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{\text{aus NSG}} + \rho\underbrace{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}}_{\text{aus therm.}} + \varepsilon\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{aus KG}}$$

aus therm. Beziehungen, $d\varepsilon = Tds - pdV$
$= Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Nach Einsetzen folgt durch Vergleich mit der rechten Seite des Energieerhaltungssatzes die allgemeine Gleichung für den Wärmetransport,

$$\boxed{\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}s\right] = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \vec{\nabla}(\kappa\vec{\nabla}T)}$$

Lokal — konvektiv — viskos — Wärmeleitung

Ohne Viskosität und Wärmetransport verschwindet die rechte Seite, es ergibt sich dann die Energieerhaltung in einer idealen Flüssigkeit: die Adiabatengleichung $\frac{ds}{dt} = 0$.

(Es ist $\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right]$)

Die Gesamt-Entropie der Flüssigkeit

$$S = \int \rho \cdot s \, dV$$

wächst, da die irreversiblen Prozesse Wärmeleitung und innere Reibung ablaufen.

6.2 Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden

Oft lässt sich die Wärmeleitungsgleichung stark vereinfachen. Falls gilt

Strömungsgeschwindigkeit << Schallgeschwindigkeit,

sind die Druckänderungen so klein, dass die zugehörigen Dichteänderungen vernachlässigbar sind.

Die Dichteänderungen infolge Temperaturänderung ΔT müssen jedoch berücksichtigt werden

$\Rightarrow$ bei der Differentiation der thermodyn. Größen den Druck als konstant annehmen, nicht jedoch die Dichte:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p}_{= c_p/T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \vec{\nabla} T$$

mit der spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck, $c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$

$$\Rightarrow \boxed{T \frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{T \vec{\nabla} s = c_p \vec{\nabla} T}$$

Einsetzen in die Wärmetransportgleichung ergibt

$$\boxed{\rho \cdot c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} T \right] = \vec{\nabla}\left(\kappa \vec{\nabla} T \right) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}$$

Bei kleinen Temperaturdifferenzen kann auch die Dichte als konstant angesehen, und die Flüssigkeit insgesamt als inkompressibel behandelt werden.

Dann ist die Kontinuitätsgleichung

$\vec{\nabla}\vec{v} = 0$, und bei kleinem ΔT können wir auch die Temperaturabhängigkeit von η, κ und c_p vernachlässigen. Nach Division durch $(\rho \cdot c_p)$ folgt die Wärmetransportgleichung in einem inkompressiblen Fluid:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2 c_p} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]^2}$$

mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ kinemat. Zähigkeit

$\chi = \frac{\kappa}{\rho \cdot c_p}$ Temperaturleitfähigkeit, "thermometric conductivity"

In einer ruhenden Flüssigkeit wird der Energietransport allein durch Wärmeleitung bewirkt; ohne geschwindigkeitsabhängige Terme wird die Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \, \Delta T}$$

„Wärmeleitungsgleichung“, „Fouriersche Gleichung“

Diese Gleichung folgt auch direkt aus der Energieerhaltung: die in einem bestimmten Volumen pro Zeiteinheit absorbierte Wärmemenge muss gleich dem Wärmestrom sein, der durch die Oberfläche in das Volumen fließt:

$$\varrho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla} q = k \, \Delta T \Rightarrow \text{Wärmeleitungsgl.}$$

abs. Wärmemenge = Wärmestrom

Die Wärmeleitungsgleichung ist nur sehr begrenzt anwendbar: Bei Flüssigkeiten im Schwerefeld bewirkt bereits ein kleiner Temperaturgradient eine merkliche Strömung („freie Konvektion“): nur wenn $\vec{\nabla} T$ der Schwerkraft entgegengerichtet ist, oder die Flüssigkeit sehr zäh ist, gilt die Gleichung.

Sie ist dennoch wichtig, da sie auch Wärmeleitung in festen Körpern beschreibt, und soll deshalb hier untersucht werden.

Ist die Temperaturverteilung in einem ungleichmäßig erwärmten, ruhenden Medium zeitlich konstant, wird die Wärmeleitungsgleichung – bei konstanter Wärmeleitfähigkeit k – zur Laplace-Gleichung

$$\boxed{\Delta T = 0}$$

(kann k nicht als konstant angesehen werden, muss man allgemeiner schreiben:

$$\boxed{\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}T) = 0}\;)$$

Sind zusätzlich fremde Wärmequellen vorhanden, muss zur Wärmeleitungsgleichung ein Zusatzterm addiert werden, z.B. für die Aufheizung durch elektrischen Strom.

Sei Q die Wärmemenge, die von Quellen an die Flüssigkeit pro Volumen- u. Zeiteinheit abgegeben wird,

$$Q = Q(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + Q}$$

plus Randbedingungen.

6.3 Wärmetransport in einem unbegrenzten Medium

Sei die Temperaturverteilung bei $t=0$ vorgegeben:

$T = T_0(x,y,z)$; berechne $T(\vec{r}, t \geq 0)$!

$\Rightarrow$ Entwickle die gesuchte Funktion in ein Fourier-Integral:

$$T(\vec{r},t) = \int T_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\text{mit } T_{\vec{k}}(t) = \int T(\vec{r},t)\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, d^3x$$

Für jede Fourier-Komponente der Temperatur

$$T_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

folgt die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \quad : \quad \text{Wärmeleitungsgleichung}$$

$$\frac{dT_{\vec{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\vec{k}} = 0$$

Daraus folgt die Zeitabhängigkeit der $T_{\vec{k}}$ als

$$T_{\vec{k}} = T_{0\vec{k}}\, e^{-k^2\chi \cdot t},$$ und mit $T = T_0(\vec{r})$ für $t=0$:

$$T_{0\vec{k}} = \int T_0(\vec{r}\,')\, e^{-i\vec{k}\vec{r}\,'} d^3x'$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\vec{r},t) = \int T_0(\vec{r}\,')\, e^{-k^2\chi t}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, d^3x' \frac{d^3k}{(2\pi)^3}}$$

Das Integral über d^3k ist darstellbar als Produkt dreier gleichwertiger Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} \cos\beta\xi \, d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/4\alpha}$$

mit ξ = eine der Komponenten des Vektors $\vec{k}$; das analoge sin-Integral verschwindet, da sin eine ungerade Funktion ist.

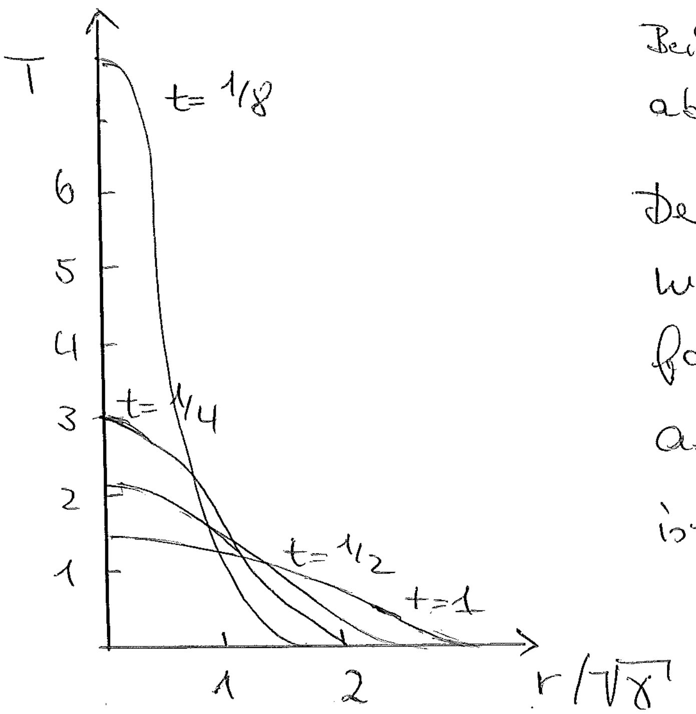
$$\Rightarrow \boxed{T(\vec{r},t) = \frac{1}{8(\pi\chi . t)^{3/2}} \int T_0(\vec{r}\,') \exp\left\{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{4\chi t}\right\} d^3x'}$$

Zeitabhängige Temperaturverteilung, bei gegebenem Anfangswert T_0.
Hängt T_0 nur von einer Koordinate ab (x), lässt sich die $dy'dz'$ Integration ausführen $\Rightarrow$

$$T(x,t) = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x') \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\} dx'$$

und für eine anfängliche δ-Flussverteilung $T_0(\vec{r}) = \text{const} \cdot \delta(\vec{r})$:

$$\boxed{T(\vec{r},t) = \text{const} \cdot \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} e^{-r^2/(4\chi t)}} \qquad (\sigma^2 = 2\chi t)$$



Bei $r=0$ nimmt die Temperatur $\propto t^{-3/2}$ ab, in der Umgebung nimmt sie zu.

Der Verlauf der Temperaturausdehnung wird i.W. durch den Exponentialfaktor bestimmt. Die Standardabweichung der Gaußfunktion ist $\sigma = \sqrt{2\chi t}$, die Breite $\Gamma = \sqrt{8\ln 2}\,\sigma$, d.h.

$\ell \propto \sqrt{t}$.

Dementsprechend ist die Relaxationszeit für den Wärmeleitungsvorgang, in der sich die Temperaturen merklich angleichen,

$$\boxed{\tau \propto \frac{l^2}{\chi}}$$

($l \sim$ Größenordnung der Abmessungen des Körpers, der zunächst ungleichmäßig erwärmt ist)

Thermische Störungen breiten sich instantan über den ganzen Raum aus: Bei anfänglicher δ-Funktion geht die Verteilung schon im nächsten Moment ~~nur~~ im Unendlichen asymptotisch gegen 0.

(In räumlich begrenzten Medien kommen die Randbedingungen hinzu).

6.4 Konvektion

Konvektion ist die Strömung in einer ungleichmäßig erwärmten Flüssigkeit. Sind die Temperaturdifferenzen groß gegen die Temperaturänderungen durch Wärmeentwicklung bei der Energiedissipation,

$$\Delta T \gg \Delta T_{diss},$$

kann man den Viskositätsterm in der Wärmetransportgleichung vernachlässigen,

$$\chi \Delta T \gg \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} T = \chi \Delta T}$$ für inkompressible Fluide

mit der Temperaturleitfähigkeit

$$\chi = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \quad , \quad k = \text{Wärmeleitfähigkeit.}$$

Zusammen mit der Navier-Stokes Gleichung wird Konvektion dadurch vollständig beschrieben (incl. Kontinuitätsgleichung).

Stationäre Konvektion

keine zeitliche Änderung der Temperaturverteilung,

$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ die Zeitableitungen fallen heraus,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{v}\,\vec{\nabla} T = \chi \,\Delta T & \\ (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\frac{p}{\rho} + \nu \,\Delta \vec{v} & \\ \vec{\nabla}\vec{v} = 0 & \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{Konvektion (stat.)} \\ \text{NSG} \\ \text{KG} \end{array}$$

$\vec{v}$, T und $\frac{p}{\rho}$ sind die unbekannten Funktionen, ν und χ Parameter (i.a. konstant).

Die Lösungen hängen über die Randbedingungen (z.B. fester Körper in der Strömung) von weiteren Größen ab: zB.

- Längenskala eines festen Körpers in der Strömung
- Geschwindigkeit $\vec{u}$ der Grundströmung
- charakt. Temperaturdifferenz $T_1 - T_0$ zwischen Fluid und festem Körper.

Die Gleichung für T ist linear und homogen, sie kann deshalb mit einem beliebigen konstanten Faktor multipliziert werden

⇒ die Maßeinheit der Temperatur ist willkürlich wählbar ⇒ wähle Kelvin

⇒ 5 Parameter charakterisieren die Konvektion; Einheiten:

$[\nu] = [\chi] = \frac{m^2}{s}$; $[u] = \frac{m}{s}$; $[l] = m$; $[T_1 - T_2] = K$.

Daraus lassen sich zwei unabhängige dimensionslose Kombinationen bilden:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Re = \dfrac{u \cdot l}{\nu} & \text{Reynoldszahl, s.o.} \\[2ex] Pr = \dfrac{\nu}{\chi} & \text{Prandtl-Zahl} = \dfrac{\text{kinemat. Viskosität}}{\text{Temperaturleitfähigkeit}} \end{array}}$$

Die Prandtl-Zahl (≙ Wärmeübertragungskennwert) ist eine Materialkonstante, die von T, aber nicht von den Eigenschaften der Strömung abhängt. Für Gase ist sie von der Größenordnung 1, für Flüssigkeiten variiert sie stark. Bei 20°C ist Pr in...

	Pr
Quecksilber	0.044
Luft	0.733
Wasser	6.75
Alkohol	16.6
Glycerin	7250

Das Produkt von Re und Pr ist

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{u \cdot l}{\chi} \equiv \text{Péclet-Zahl}.$$

In die dimensionslose Funktion für die Temperaturverteilung gehen Re und Pr als Parameter ein,

$$\frac{T-T_0}{T-T_1} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}, Re, Pr\right).$$

In die Geschwindigkeitsverteilung geht nur Re ein, da sie durch NSG und KG bestimmt ist, in denen χ bzw. Pr nicht vorkommen:

$$\frac{\vec{u}}{u} = \vec{f}\left(\frac{\vec{r}}{l}, Re\right).$$

Den Wärmetransport zwischen Flüssigkeit und festem Körper charakterisiert die Wärmeübergangszahl α,

$$\alpha = \frac{q}{T_1-T_0} \quad ; \quad q = |\vec{q}|, \quad \vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

Wärmestromdichte durch die Körperoberfläche

$T_1 - T_0$ = Temperaturdifferenz fester Körper / Flüssigkeit.

Der Wärmetransport kann durch die dimensionslose Nusselt-Zahl charakterisiert werden,

$$\boxed{Nu \equiv \frac{\alpha \cdot l}{\kappa} = f(Re, Pr)}$$

7. Diffusion

7.1 Flüssigkeits-Gemische

Bisher haben wir das Fluid als homogen angenommen. Bei Gemischen, deren Zusammensetzung vom Ort abhängt, werden die hydrodynamischen Gleichungen wesentlich abgeändert.

Gemisch aus 2 Komponenten:

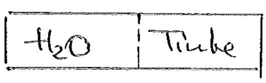
Konzentration $c \equiv \frac{m_1}{M}$; $M = m_1 + m_2$ = Gesamtmasse im Volumenelement, m_1 = 1. Komponente

Die Verteilung der Konzentration ist zeitabhängig:

(1) Jedes Teilvolumen bewegt sich als Ganzes mit unveränderter Zusammensetzung: Mechanische Durchmischung

Diese Konzentrationsänderung ist reversibel und bewirkt keine Energiedissipation. (Beispiel: Paraffin in H_2O)

(2) Die Zusammensetzung ändert sich durch molekularen Massentransport aus einem Teilvolumen in ein anderes:



Der Konzentrationsausgleich geschieht durch Diffusion, ist zeitlich irreversibel.

Neben Wärmeleitung und Viskosität ist Diffusion die Ursache der Energiedissipation in einem Flüssigkeitsgemisch.

Ohne Diffusion bleibt die Zusammensetzung eines Fluidelements bei der Bewegung unverändert, es gilt eine Kontinuitätsgleichung für den „Substanzstrom" $\rho \cdot c \cdot \vec{v}$ $\left(c = \frac{m_1}{M}\right)$:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot c \cdot \vec{v}) = 0$$

Integration mit Gaußschem Satz ergibt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c \, dV = - \oint \rho \cdot c \cdot \vec{v} \, d\vec{f}}$$

(Der Strom für die zweite Substanz ist analog $\rho \cdot (1-c) \vec{v}$)

Mit Diffusion kommt der sog. Diffusionsstrom hinzu,

$$\boxed{\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot c \cdot \vec{v}) = - \vec{\nabla} \vec{i}}$$

„6. Grundgleichung der Hydrodynamik", bei Gemischen

bzw. in integraler Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \cdot c \, dV = - \oint \rho \cdot c \cdot \vec{v} \, d\vec{f} - \oint \vec{i} \, d\vec{f}$$

Mit Hilfe der thermodynamischen Größen – die jetzt jedoch auch von der Konzentration c abhängen – erhalten wir außerdem die verallgemeinerte Wärmetransportgleichung (5. Gleichung). Sie folgt aus der Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \cdot \varepsilon \right] = - \vec{\nabla} \vec{j}_{\text{visc}}$$

durch Umformung mit Hilfe von Navier-Stokes und Kontinuitätsgleichung.

Jetzt enthalten die Ausdrücke für Energie und Enthalpie jedoch einen zusätzlichen Term mit dem Differential der Konzentration:

(1) $d\varepsilon = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho + \mu\,dc$ Energie

(2) $dw = T\,ds + \frac{1}{\rho}\,dp + \mu\,dc$ Enthalpie

mit $\mu \equiv$ chem. Potential des Gemisches; proportional zur mittleren Teilchenzahl

[analog ist $T \propto$ mittlere Energie, $\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$]

$\Rightarrow$ in der Ableitung $\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)$ kommt zusätzlich der Term $\rho \cdot \mu \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)$ vor; analog kommt zu $-\vec{v}\vec{\nabla}p$ der Term $\rho \cdot \mu \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c$ hinzu.

Damit wird die Gleichung für die zeitliche Änderung der Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon\right] = -\vec{\nabla} j_{\text{wie}} + \rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}s\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \\ + \vec{\nabla}\vec{q} - \mu \vec{\nabla}\vec{i}$$

Damit der Energieerhaltungssatz erfüllt ist, muss demnach gelten

$$\boxed{\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}s\right] = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \vec{\nabla}(\vec{q} - \mu\vec{i}) - \vec{i}\vec{\nabla}\mu}$$

[mit $\vec{\nabla}\vec{q} - \mu\vec{\nabla}\vec{i} = \vec{\nabla}(\vec{q} - \mu\vec{i}) + \vec{i}\vec{\nabla}\mu$]

Diese Gleichung für die zeitliche Änderung der Entropie unter Berücksichtigung der Diffusion ist eine Verallgemeinerung der Wärmetransportgleichung.

Um die Gleichungen zu lösen, müssen der Diffusionsstrom $\vec{i}$ und der Wärmestrom $\vec{q}$ durch die Temperatur- und Konzentrationsgradienten ausgedrückt werden. Beide Ströme hängen i.a. von beiden Gradienten ab. Sind diese klein, kann man $\vec{i}$ und $\vec{q}$ als lineare Funktionen von $\vec{\nabla}\mu$ und $\vec{\nabla}T$ ansetzen:

$$\vec{i} = -\alpha \vec{\nabla}\mu - \beta \vec{\nabla} T$$
$$\vec{q} = -\delta \vec{\nabla}\mu - \gamma \vec{\nabla} T + \mu \vec{i}$$

Sofern sich Temperatur und Konzentration nur wenig ändern, und es keinen wesentlichen Druckgradienten gibt, lassen sich diese Gleichungen mit Hilfe thermodynamischer Relationen umformen zu:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D\left[\Delta c + \frac{k_T}{T}\Delta T\right] \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T}\frac{\partial c}{\partial t} &= \chi \Delta T \end{aligned}}$$

d.h. Temperatur und Konzentration sind durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt.

Mit $D = \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T} \equiv$ Diffusionskoeffizient

$k_T \cdot D = \frac{\alpha \cdot T}{\rho}\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{c,p} + \beta \equiv$ Thermodiffusionskoeffizient.

Bei kleinen Konzentrationen wird $k_T \cdot D \to 0$, es folgt eine reine Diffusionsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \Delta c}$$, plus Randbedingungen.

Die Diffusionsgleichung hat dieselbe Gestalt wie die Wärmeleitungsgleichung für eine ruhende Flüssigkeit,

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T}$$

so dass alle Formeln aus Kap. 6 übertragen werden können mit

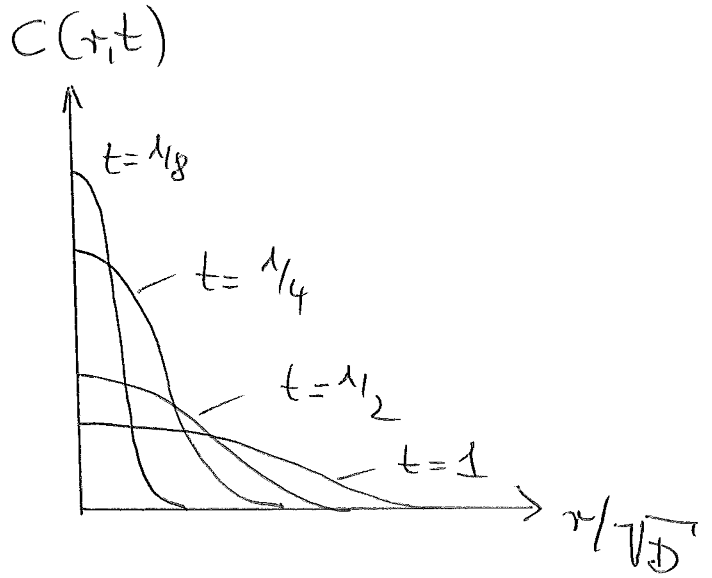
$$T \rightarrow c$$
$$\chi \rightarrow D \, .$$

Beispielsweise ergibt sich für die Verteilung einer gelösten Substanz mit δ-Funktions-Anfangsbedingungen bei $t=0$

$$c(r,t) = \frac{M}{8\rho(\pi \cdot D \cdot t)^{3/2}} \; e^{-r^2/(4Dt)}$$

in Polarkoordinaten, 3dimensional; M = Gesamtmenge der gelösten Substanz.

Zeitverteilung der Konzentration im Diffusionsvorgang:



1dim:

$\sigma = \sqrt{2Dt}$ Standardabw.

$\Gamma = \sqrt{8 \ln 2}\, \sigma$ Breite

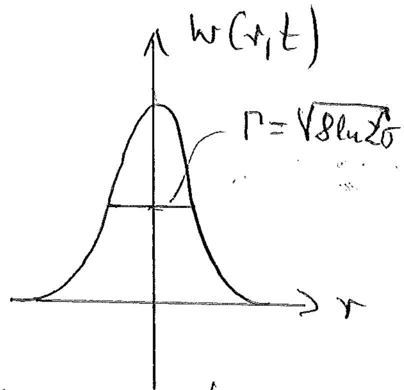
7.2 Brownsche Bewegung

Aufgrund molekularer Stöße machen in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen eine ungeordnete "Zitterbewegung", die der Botaniker R. Brown (1773–1858) 1827 entdeckt hatte, und deren Ursache bis zu A. Einsteins Arbeit 1905 unbekannt blieb:
A.E., Ann. Physik 17 (1905) 549–560.

Sei zu $t=0$ ein "Brownsches Teilchen" (eg. Blütenpollen in Wasser) im Koordinatenursprung; seine Bewegung wird als Diffusionsprozess beschrieben, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit tritt an die Stelle der Konzentration. Dann lässt sich die Lösung der Differentialgleichung in 7.1 verwenden,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \Delta w$$

$$\Rightarrow \boxed{w(r,t) = \frac{M}{8\rho(\pi D t)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right]}$$



Im 3dim. Fall, radiale Koordinate

Voraussetzung: die Teilchen der gelösten Substanz wechselwirken nicht miteinander, die Teilchenbewegung ist unabhängig vom jeweils nächsten anderen Teilchen.

Mit $w(r,t)\,dr$ = Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Brownsche Teilchen zur Zeit t in einem Abstand zwischen $(r, r+dr)$.

Setze $\frac{M}{\rho} \equiv 1$, $\cdot\, 4\pi r^2 dr$ (= Volumen der Kugelschale)

$$\Rightarrow w(r,t)\,dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right] r^2 dr$$

Das mittlere Quadrat des Abstandes vom Ausgangspunkt des Brownschen Teilchens zur Zeit t ist

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 w(r,t)\,dr = 6Dt \qquad \left[\text{beachte } \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\langle r^2 \rangle} \propto \sqrt{t}}$$

Der Diffusionskoeffizient D lässt sich aus der Beweglichkeit b berechnen:

Es wirke eine konstante äußere Kraft (z.B. die Schwerkraft) $\vec{F}$ auf die Brownschen Teilchen. Im stationären Zustand ist sie gleich dem Widerstand $\frac{\vec{v}}{b}$ (b = const) gegen die Teilchenbewegung:

$$\boxed{\vec{v} = b \cdot \vec{F}}$$, $b \equiv$ Beweglichkeit (berechenbar aus den hydrodyn. Gleichungen).

Widerstand bei kugelförmigen Teilchen:

$$\boxed{\vec{F} = 6\pi \eta R \vec{v}}$$, Stokessche Formel

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{\vec{v}}{\vec{F}} = \frac{1}{6\pi\eta R}}$$

[Bei nicht-kugelförmigen Teilchen hängt der Widerstand auch von der Bewegungsrichtung ab]:

$$F_i = a_{ik}\, v_k \,, \quad a_{ik} = \text{symmetrischer Tensor};$$

Zur Berechnung von b über alle Orientierungen mitteln; mit den Hauptachsenwerten a_1, a_2, a_3 von a_{ik} $\Rightarrow$

$$b = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \;].$$

<u>Beziehung zwischen b und D</u> ($D = T \cdot b$, "<u>Einstein-Relation</u>")

der Diffusionsstrom ist

$$\boxed{\vec{i} = -\rho D \vec{\nabla} c + \rho \cdot c \cdot b \cdot \vec{F}}$$

Term aufgrund des Konzentrationsgradienten

Term aufgrund der äußeren Kraft, $\rho \cdot c \cdot \vec{v} = \rho c b \vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{i} = -\frac{\rho \cdot D}{(\partial\mu/\partial c)_{T,p}} \vec{\nabla}\mu + \rho c b \vec{F}$$ mit μ = chem. Potential der suspendierten Teilchen.

Das chem. Potential hängt von der Konzentration ab,

$$\mu = T \ln c + \psi(p,T)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{i} = -\frac{\rho \cdot D \cdot c}{T} \vec{\nabla}\mu + \rho \cdot c \cdot b \cdot \vec{F}}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht gibt es keine Diffusion, $\vec{i} = 0$.

Mit äußerem Feld muss im Gleichgewicht gelten

$\mu + U = \text{const}$; $U \hat{=}$ potentielle Energie der suspendierten Teilchen im Feld

$\Rightarrow \vec{\nabla}\mu = -\vec{\nabla} U = \vec{F}$, und mit $\vec{i} = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{\rho D c}{T}\vec{F} + \rho \cdot c \cdot b \cdot \vec{F}$$

$\Rightarrow \frac{D}{T} = b$, $\boxed{D = T \cdot b}$ „Einstein-Relation" für die Beziehung zwischen Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient: Verknüpfung über die Temperatur.

Einsetzen der Beweglichkeit bei kugelförmigen Teilchen ergibt ($k_B = 1$)

$$\boxed{D = \frac{T}{6\pi \eta R}}$$

translatorische Diffusion suspendierter Brownscher Teilchen (es gibt auch eine Brownsche Rotations / Diffusionsbewegung)

(In der Einsteinschen Arbeit wird die Notation verwendet

$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi\eta d}$ mit $R \simeq 8.31 \frac{J}{k \cdot mol}$, $N = 6.03 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$

Gaskonst. , Avogadrosche Zahl

$d \hat{=} R$ (oben) ; $k_B = \frac{R}{N} \equiv 1 \Rightarrow$ entspricht dem obigen Resultat).

– Die Boltzmann-Konstante $k = 1.3 \cdot 10^{-23}\, J/K$ ist die auf ein Molekül bezogene Gaskonstante) $L = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J/K$

7.3 Diffusion in relativistischen Systemen

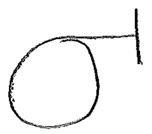
- Vielkörpersysteme (Atomkerne aus Baryonen) bei relativistischen Energien, wie sie in Teilchenbeschleunigern erreicht werden.

- CERN SPS: fixed-target Experimente mit schweren Ionen

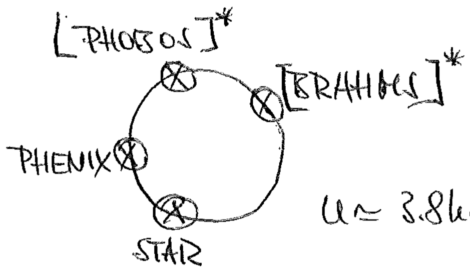
$E_L = 158$ GeV/Teilchen $\;{}^{208}Pb + {}^{208}Pb$

$$E_{cm} = \sqrt{s_{NN}} = \left[2m^2 + 2E_L m\right]^{1/2} \simeq 17.3\,\text{GeV}$$

Nukleonenmasse, 938 MeV



- RHIC collider, Brookhaven (BNL)



$U \simeq 3.8$ km

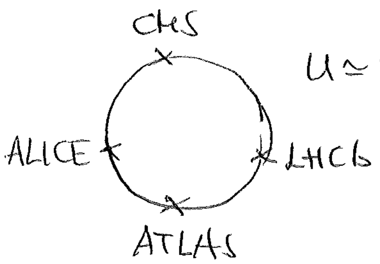
100 GeV/Teilchen $\;{}^{197}_{79}Au$ + 100 GeV Au

$\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV $= 0.2$ TeV

[* nicht mehr aktiv]

6 intersections; ursprünglich
4 Experimente, jetzt noch 2.

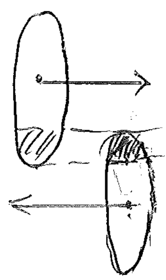
- LHC collider, CERN



$U \simeq 27$ km

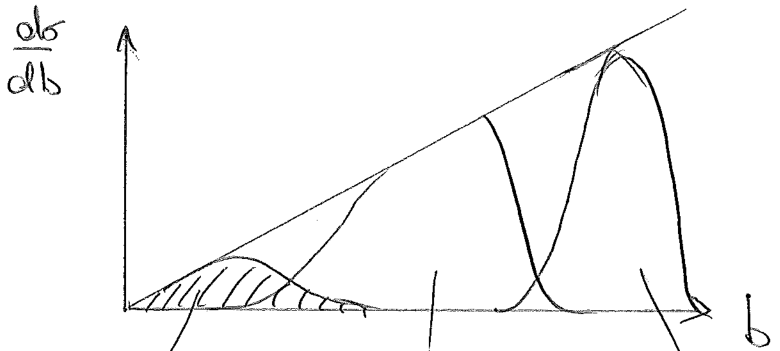
max 2.76 TeV/Teilchen $\;{}^{208}_{82}Pb$ + 2.76 TeV Pb

$\sqrt{s_{NN}} = 5.52$ TeV



Stark Lorentz-kontrahierte Kollisionspartner, charakterisiert durch

- Teilchenzahlen N_1, Z_1; N_2, Z_2
- c.m. Energie $\sqrt{s}$
- Stoßparameter b
- $d(v) = d_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Lorentz-Kontraktion



1) In zentralen Stößen bei Energiedichten über dem kritischen Wert $\varepsilon_{krit} \simeq 1.5 \frac{GeV}{fm^3}$ wird ein kurzlebiges Quark-Gluon Plasma gebildet, für $\simeq 10^{-23}$ s. Es entspricht dem Urzustand der Materie im Universum, bis $\simeq 10\mu s$ nach dem Urknall.

2) Im Verlaufe der Kollision werden aus der verfügbaren relativistischen Energie so viele Teilchen erzeugt, dass eine nichtgleichgewichts-statistische Betrachtungsweise gerechtfertigt ist:

- bei SPS-Energien ~ 2100 geladene Hadronen
- bei RHIC- " ~ 5000 "
- bei LHC- " ~ ~~2~~1000 "

Es wird dabei die verfügbare relativistische Energie

$$E_{av} = \sqrt{s} - m(A_1 + A_2)$$

in Ruhemasse und kinetische Energie erzeugter Teilchen umgewandelt. In transversaler Richtung (senkrecht zum Strahl) sind die Energieverteilungen nahe am statistischen Gleichgewicht.

In longitudinaler Richtung – parallel zum Strahl – sind die Verteilungsfunktionen entfernt vom thermodynamischen Grenzfall.

Dies gilt v.a. für die Verteilung der Rapidität der Teilchen (≙ Lorentz-invariantes Analogon der Geschwindigkeit)

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_\parallel}{E - p_\parallel} = \tanh^{-1}\left(\frac{p_\parallel}{E}\right) \approx -\ln \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \equiv \eta$$

Als Folge von Stößen und Teilchenerzeugung genügt die Verteilungsfunktion der Rapidität einer Diffusionsgleichung; in linearer Näherung ist für $R = R(y,t)$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{\tau_y} \frac{\partial}{\partial y}\left[(y - y_{eq}) R\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_y R\right]}.$$

mit y_{eq} = Gleichgewichtswert der Rapidität (= 0 für symm. Systeme)

τ_y = Rapiditäts-Relaxationszeit

D_y = Diffusionskoeffizient, bestimmt die Verbreiterung der Verteilungsfunktion

$D_y \propto T/\tau_y$ Dissipations-Fluktuations-Theorem; T = Gleichgewichtstemperatur

Schematisches Bild der Rapiditäts-Relaxation:

Die Relaxationszeit τ_y und der Diffusionskoeffizient D_y sind über ein Dissipations-Fluktuationstheorem und die lokale Gleichgewichtstemperatur T miteinander verknüpft.
(analog zur Brownschen Bewegung, siehe 7.2).

Lösung der linearen Diffusionsgleichung:

$$R(y,t) = \left[\sqrt{2\pi}\,\sigma_y(t)\cdot 2\right]^{-1} \left\{ \exp\left[-\frac{\left(y+y_b e^{-t/\tau_y}\right)^2}{2\sigma_y^2(t)}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{\left(y-y_b e^{-t/\tau_y}\right)^2}{2\sigma_y^2(t)}\right]\right\}$$

für symmetrische Systeme; und zwei Quellen.

Varianz:

$$\sigma_y^2(t) = D_y\,\tau_y \left[1-\exp\left(-\frac{2t}{\tau_y}\right)\right] = \frac{T}{2k}\left[1-\exp\left(-\frac{2t}{\tau_y}\right)\right]$$

k = Krümmung eines parabolischen treibenden Potentials im y-Raum.

Für große Zeiten $t > t_2$ mit $\Gamma_{FWHM}(t_2) = \sqrt{8\ln 2}\,\sigma_y(t_2) \approx y_1$ wird aus den beiden getrennten Verteilungen eine einzige Verteilung, die bei $y = y_{eq}$ zentriert ist und für $t \to \infty$ in die Gleichgewichtsverteilung übergeht.

⇒ siehe u.a. Review-Artikel G.W., Prog. Part. Nucl. Phys. 59, 374 (2007) und dortige Referenzen.

$\Rightarrow$ Nichtrel. Grenzwert für T_{00} (Energiedichte)

$$\boxed{T_{00}^{nr} = \rho c^2 + \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}}$$

(Probe: $T_{00} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ruheenergie}}}{\rho c^2} = \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} \mathrel{\hat{=}}$ Nichtrel. Energiedichte!)

sowie der Impulsstromdichte-Tensor

$$\boxed{T_{ik}^{nr} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}}$$

Beachte: Beim Übergang zum nichtrelativistischen Grenzfall geht der einfache Zusammenhang zwischen Impulsdichte und Energiestromdichte

$$c^2 \cdot \frac{T^{0i}}{c} = c T^{0i}$$

verloren, weil die nichtrelativistische Energie die Ruheenergie nicht enthält: $c^2 \left(\frac{T^{0i}_{nr}}{c}\right) \neq \vec{j}$.

8.2 Relativistische Bewegungsgleichungen

für ideale Fluide (d.h. analog zur Euler-Gleichung im nichtrel. Fall) folgen direkt aus der Energie-/Impulserhaltung:

$$\boxed{\frac{\partial T_\alpha{}^\beta}{\partial x^\beta} = 0} \quad \text{mit } T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

$w = \varepsilon + p$ Enthalpie pro Volumeneinheit

In diesem Energie-Impuls-Tensor sind dissipative Prozesse (Viskosität, Wärmeleitung) noch nicht berücksichtigt, daher nur für ideale Fluide gültig; (die Ableitung des Analogons zur Navier-Stokes-Gl. ist komplizierter).

Teilchenzahlerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

n^α = Viererwektor des Teilchenstromes
n^0 = Teilchenzahldichte
n^i = Vektor des Teilchenstroms,

$n^\alpha = n \cdot u^\alpha$, n = skalare Teilchenzahldichte

$u^\alpha = (\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c})$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

In relativistischen Systemen mit Teilchenerzeugung wird die Teilchenzahl durch die Bedingungen des thermischen Gleichgewichts festgelegt.

Kontinuitätsgleichung: Die Viererdivergenz des Stromvektors $\equiv 0$:

$$\boxed{\frac{\partial (n u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0} \quad (*)$$

Zusammen mit dem Energie-/Impulstensor

$T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$ folgt:

differenzieren:

Energie-/Impulserhaltung

$$\frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial x^\beta} = u_\alpha \frac{\partial (w u^\beta)}{\partial x^\beta} + w u^\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = 0$$

auf die Richtung von u^α projizieren: $u^\alpha \cdot |$

beachte: $u_\alpha u^\alpha = 1$; $u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial (w u^\beta)}{\partial x^\beta} - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0$$

Ersetze $w u^\beta = n u^\beta \cdot (w/n)$, beachte (*) – 2. Term im Differential fällt weg –

$$\Rightarrow \quad n u^\beta \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{w}{n} - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right] = 0$$

Mit der Enthalpie $w = T \cdot s + p$ (s = die auf die Einheit des Ruhevolumens bezogene Entropie)

$$dw = T ds + dp$$

$$d\left(\frac{w}{n}\right) = T\, d\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{1}{n} dp$$

($\hat{=}$ Enthalpie für ein Teilchen; $\frac{1}{n}$ ist das auf ein Teilchen entfallende Volumen).

$\Rightarrow$ der Ausdruck in $[\ldots]$ ist die Ableitung

$$T \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{s}{n} \right)$$

$\Rightarrow$ ohne den Faktor $n \cdot T$ folgt

$$\boxed{u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{s}{n} \right) = 0}$$

d.h. die Bewegung verläuft – wie bei nichtrel. idealen Fluiden – adiabatisch, die Entropie ändert sich nicht.

Mit der Kontinuitätsgleichung (*) lässt sich das in der Form schreiben

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(s u^\beta \right) = 0}$$

: die Viererdivergenz des Entropiestromes $s u^\beta$ verschwindet.

Die relativist. Verallgemeinerung der Eulerschen Gleichung erhält man durch geeignete Projektion und Umformung der Gleichung für die Energie-/Impulserhaltung als

$$\boxed{w u^{\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - u_\alpha u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta}}$$

und für eine isentrope stationäre Strömung folgt die relativistische Verallgemeinerung der Bernoullischen Gleichung als

$$\boxed{\frac{\gamma \cdot w}{n} = \text{const}} \quad , \; \gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \underset{v \ll c}{\approx} 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$w = \varepsilon + p$ Enthalpie pro Volumeneinheit

Zur Ableitung der relativistischen Verallgemeinerung der Navier-Stokes-Gleichung siehe Literatur, z.B. Landau-Lifshitz, § 136.

9. Astrophysikalische Hydrodynamik

Lit. u.a. S. N. Shore, An Introduction to Astrophysical Hydrodynamics, Acad. Press, 1992

Statische und dynamische Probleme bei Fluiden in nicht-terrestrischen Umgebungen.

- Da Sterne aus Gasen bestehen, sollten dort kinetische Gastheorie / Gasdynamik dominieren. Da jedoch das Gas meist i.W. homogen ist, und sein eigenes Gravitationsfeld erzeugt, simuliert es die Bewegung eines Fluids im Feld. Die mittlere freie Weglänge λ ist im Vergleich zu jeder relevanten Größenskala der Sterne klein, so dass Störungen "ausgewaschen" werden, und die Sternstruktur kontinuierlich ist: $\boxed{\lambda = \frac{u}{\sigma \cdot \rho}}$; $\begin{cases} \rho \simeq 1.5 \cdot 10^{3} \frac{kg}{m^3} \text{ in stellarer Materie} \\ u = 1.7 \cdot 10^{-27} kg \text{ at. Masseneinheit;} \\ \sigma \simeq 40 mb = 4 \cdot 10^{-30} m^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1.7 \cdot 10^{-27}}{1.5 \cdot 10^{3} \cdot 4 \cdot 10^{-30}} m \simeq 0.3 m \ll R_\odot = 6.96 \cdot 10^{8} m$$

$\Rightarrow$ Sterne (und andere kosmische Materieansammlungen) können stets auf bestimmten Längen- und/oder Zeitskalen durch eine hydrodynamische Approximation beschrieben werden. Alle Arten von hydrodyn. Fluss, die sich auf der Erde beobachten lassen, finden sich auch im Universum; jedoch auf wesentlich größeren Skalen:

- magneto-hydrodyn. Fluss,
- Turbulenz
- Überschallbewegung - Instabilitäten (Schocks), ...

Hier kann nur ein repräsentatives Kapitel herausgegriffen werden:

Schockwellen in der Astrophysik

Ursprung der theoret. Behandlungen von Schockwellen: ~ B. Riemann's Theorie über die Ausbreitung akustischer Störungen, ~1860.

- E. Mach, Laborversuche zu Überschall-Flow, ~1880
- L. Prandtl, Überschall-Grenzschichten, ~1940 (floss ins Manhattan-Projekt ein)

In der Astrophysik sind Schockwellen eher die Regel als die Ausnahme. Viele der Beobachtung zugängliche Regionen im Universum sind weit entfernt von thermodynamischem oder mechanischem Gleichgewicht; oft sind die Zeitskalen für Energiedissipation sehr groß. Die Entweichgeschwindigkeiten sind für die meisten kosmischen Objekte weit größer als die Schallgeschwindigkeit, so dass alles Material, das ins interstellare Medium gelangt, supersonische Geschwindigkeiten haben muss und erst später Energie und Impuls dissipiert, bis thermisches Gleichgewicht erreicht wird.

Im interstellaren Medium und bei vielen stellaren Phänomenen ist die mittlere freie Weglänge so groß, dass die Viskosität in erster Ordnung vernachlässigbar ist. Astrophysikalische Schocks können daher zunächst als nicht viskos behandelt werden, später wird die Dissipation an der Schockfront einbezogen.

Schock-Erzeugung:

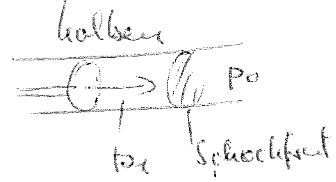
Da Schocks Diskontinuitäten im Fluss darstellen, müssen sie stark nichtlinear sein; sie entstehen als Ergebnis einer Instabilität, durch die der Fluss als Funktion der Geschwindigkeit nichtlinear wird.

Beispiel Schallwellen

- erfüllt Kontinuitäts- u. Bewegungsgleichung
- bei anwachsender Dichte wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

Ausbreitung einer Störung:

(1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$ Kont.gl., 1dim.



(2) $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ Bewegungsgl., 1dim

[$p(\rho)$ Zustandsgl.]

Mit $p = p(\rho)$; $\phi = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, $[\Lambda = \ln \rho]$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$\rightsquigarrow$ (2') $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\phi \frac{\partial \Lambda}{\partial x}$; (1') $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

Kontinuitätsgl. (1') $| \cdot \phi^{1/2}$ $\rightsquigarrow$ $\phi^{1/2}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \phi^{1/2} u \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -\phi^{1/2}\frac{\partial u}{\partial x}$

combine (1')+(2') $\rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u - \phi^{1/2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \phi^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \left(u - \phi^{1/2}\right)\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right]}$$

~~und~~ Multiplikation mit $-\phi^{1/2}$ ergibt ein analoges Resultat.

$\rightsquigarrow$ $\exists$ neue Propagationsbedingung: Die Störung bewegt sich mit

$$\boxed{U_\pm = u \pm \phi^{1/2}}$$

Durch die Beziehung

$$\phi = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

geht die Zustandsgleichung in die Propagationsbedingung ein.

Je nach der Abhängigkeit $p(\rho)$ des Drucks von der Dichte wird die Störung im Vergleich zur konstanten Schallgeschwindigkeit beschleunigt oder abgebremst.

Ist die Schallgeschwindigkeit dichte-unabhängig, bewegt sich die Störung mit konstanter Geschwindigkeit; ist die Schallgeschw. dichteabhängig, so steigt sie bei Kompression (da $\phi > 0$), die Welle beschleunigt.

Bedingung für die Wellenfront:

$$\boxed{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\pm} = u \pm \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}}$$

Linien in der (x,t) Ebene: "Charakteristiken"

Riemann-Invarianten (1860)

oder

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \int \frac{dp}{\rho \cdot a_s}$$

Schallgeschw. ist eine Fkt der Dichte über die Zustandsgleichung; $\boxed{p = k\rho^{\kappa}}$

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa \cdot p}{\rho}\right)^{1/2}$$

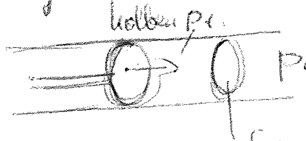
$\kappa = 1 + \frac{2}{f}$ $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ bei idealem Ga.

Entlang der so definierten Trajektorien werden die erhaltenen Fluss-Größen durch das Fluid transportiert.

Ist in einer dieser Größen eine Diskontinuität enthalten, wird sie ebenfalls der durch die Riemann-Invariante gegebenen Trajektorie folgen.

z.B. u: Geschwindigkeit eines Kolbens, der in ein Gas stößt ⇒ u ist äußere Bedingung für den Fluss. Ist er schneller als der Schall, kann er sich nicht an Änderungen von u anpassen.

"Schock-Zylinder"



Sei die Zustandsgleichung $p = K\rho^{\kappa}$, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\pm} = u \pm \frac{2 c_s}{\kappa - 1}}$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Fluids ist

$$\boxed{u_{\pm} = c_{s,0} \cdot \left(1 \pm \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}} - 1\right]\right)}$$

$0 \equiv$ ungestörtes Fluid.

⇒ mit wachsender Dichte wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung: darauf beruht die Ausbildung der Schockwelle.

An einem best. Punkt wird das dichtere Material das weniger dichte überholen, die Schockfront baut sich auf.

Im Fluss gibt es dabei 3 erhaltene Größen:

- Massenfluss
- Impulsfluss
- Enthalpie-Fluss

daraus lassen sich Bedingungen für die Änderung der thermod. Variablen längs einer Schockfront ableiten:

Rankine - Hugoniot Bedingungen

$\kappa = \frac{5}{3}$ für id. Gas

Bei gegebenem Dichte- oder Drucksprung und κ = const. lassen sich algebraische Bedingungen für die Änderung der übrigen thermodyn. Variablen längs der Schockfront ableiten:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1)\,p_2 + (\kappa-1)\,p_1}{(\kappa-1)\,p_2 + (\kappa+1)\,p_1}$$

1 vor dem Schock
2 nach "

$$v_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, v_1$$

Impulserhaltung: $\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2$

Bei starkem Schock: $p_2 >> p_1$

$$\curvearrowright \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\kappa+1}{\kappa-1}, \quad \kappa = \frac{5}{3} \text{ id. Gas} \longrightarrow 4 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Die Kompression ist in einem Medium mit kleinerem κ (wie einem strahlungsdominierten Gas) größer, da das Medium stärker kompressibel ist. Da der Dichtesprung umgekehrt proportional zum Geschwindigkeitsprung ist, lassen sich die relevanten Größen durch Messen der Geschwindigkeiten über die Schockfront bestimmen. (umgekehrt!)

(z.B. $\kappa = \frac{4}{3}$ $\curvearrowright \frac{\rho_2}{\rho_1} = 7$)

Beim "Schockzylinder" ist der Drucksprung gegeben, und der Geschwindigkeitsprung lässt sich aus den R-H Bedingungen bestimmen.

Astrophys. Anwendungen der R-H Bedingungen

- Flare an der Sonnenoberfläche: ("Eruption") 1s → <1h; X-rays 100fach

hochenerget. Phänomen, Strahlung u. Teilchen werden aus einer kleinen Region in kurzer Zeit freigesetzt

Expandiert in die Corona und das interplanetare Medium (ρ klein):

Schockwelle (was waren die Bedingungen bei der Entstehung?)
→ RH-Bedingungen anwenden.

- Supernova

Die Expansionsgeschwindigkeit lässt sich anhand der Spektralverschiebung der Emissionslinien messen. Wie vermischt sich die Materie mit dem interstellaren Medium, und was lässt sich über die Produktion der schweren Elemente bestimmen? R-H Bedingungen und Geschw. sprung ⇒ Plasma-Diagnostik zur Berechnung der Häufigkeiten aus den gemessenen Emissionslinien.

- HII-Regionen (zB. M42 im Orion; 4 heiße Sterne im HII Nebel)
(Einfach ionisierter Wasserstoff)
Stern im Zentrum eines diffusen gasförmigen Mediums (ISM); er sei heiß genug, um das Medium zu ionisieren.
Scheint der Stern lange genug, wird genügend Energie in das Medium gepumpt, dass es sich aufheizt und expandiert
⇒ Eine Front mit einer Diskontinuität in Druck und Ionisierung bewegt sich auswärts im ISM: "Ionisierungs-Schock" mit einer Diskontinuität in der Enthalpie über die Ionisierungsregion.

Die Ionisierung verändert die Enthalpie und die Entropie des Gases ⇝ „schwacher" Schock. An der expandierenden Front entsteht eine komplexe Struktur; i.W. bewegt sich jedoch eine heiße ionisierte Region in das kühle ISM.

Erweiterte Probleme:

- Zusätzliches magn. Feld:

  Erhaltung des magn. Flusses ⇝ weitere Gl. zu R-H, die analog zur Erhaltung des Massen-flusses ist; die Sprung-konditionen an der Schockfront ändern sich.

- Wechselwirkende Schocks

Für die meisten hydrodyn. Probleme in der Astrophysik sind numerische Rechnungen die Regel. Manchmal sind jedoch analytische Abschätzungen u. Überschlagsrechnungen nützlich. Beispiel:

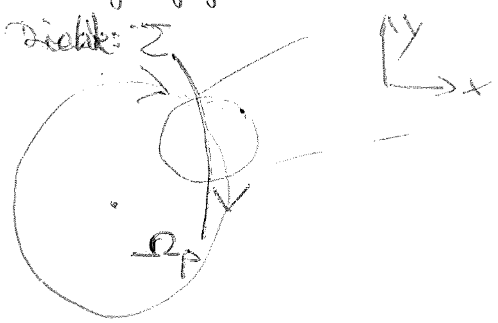
Dichteschockwellen: Spiralarm-Schocks in Galaxien

flache Spiralgalaxie mit Dichtestörung in der stellaren Komponente der Scheibe

⇝ Störung im Gravitationspotential über die Poisson-Gleichung;
Gas strömt durch die Scheibe und reagiert auf die Störung; bei Dichtestörungen kann durch Gravitationsbeschleunigung Überschall-Geschwindigkeit erreicht werden.

„Das Gas beschleunigt wenn es in das durch die Sterne erzeugte Grav. potential eintritt, und bremst ab beim Austritt." Die nichtlinearen Bewegungsgl. zeigen dabei Schock-Lösungen: W.W. Roberts, Astrophys. J. 158 (1969) 123

Bewegungsgl. im rotierenden Bezugssystem



- Dichtewelle mit Frequenz Ω_p
- dünne Scheibe aus Gas u. Sternen
- nur die Sterne unterstützen die Welle
- langsame Bewegung der Welle im Vergleich zur Rot.geschw. der Galaxie

⇒ lokale Analyse

Stationärer Fluss,

u: Geschw. der Dichtewelle

v: Geschw. der Rotation $\frac{\partial v}{\partial x} = -f$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \Sigma u}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma v}{\partial y} = 0$

Bewegungsgl. : $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + f v = -\frac{c_s^2}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - f u = -\frac{c_s^2}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- Sei der Fluss $\parallel \vec{x}$ - Richtung
- keine Abhängigkeit der Bewegung von y

Grav. potential entwickeln: $\phi(x,y) \approx \phi_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}y^2$

lokales Dichtemaximum in Spiralarm

Dichte konstant längs der Arm ⇒ 2. Term verschwindet

⇒ approx. eq. für u:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + f v = \frac{c_s^2}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 x^2 \quad (*)$$

kont. gl.

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0$$

⇝ Druckterm in (*) eliminieren ⇝ Fluss approx.

$$\boxed{\frac{1}{u}\left(u^2 - c_s^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} = f v - \phi_0'' x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -f.$$ für die x-Komponente, ⊥ zum lokalen Arm

⇝ Das Gas wird in Richtung auf das galakt. Zentrum abgelenkt als Folge der Störung; dort dient es dem zentralen schwarzen Loch als Akkretionsmaterial.

10. Hydrodynamik der Superflüssigkeiten

10.1 Grundlagen

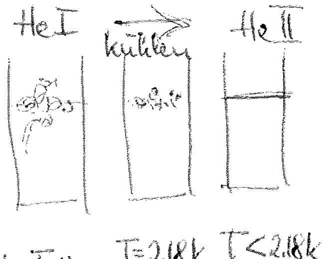
„Quantenflüssigkeiten": In der Nähe des absoluten Nullpunkts werden Quanteneffekte wichtig. Bis 0K bleibt nur Helium flüssig:

^4He : Kern und Atom haben Spin 0 → Bose-Einstein Statistik „Bose-Flüssigkeit"

^3He : " " " " " $\frac{1}{2}$ → Fermi-DIRAC " „Fermi-Flüssigkeit"

Hier zunächst auf den Bose-Fall konzentrieren.

λ-Punkt in flüssigem ^4He:



Kühlt man unter den Siedepunkt von 4.18K durch Evaporation (Vakuum-Pumpe!), „kocht" ^4He mit kleinen Bläschen. Am λ-Pkt bei 2.18K (Übergang von HeI zu HeII) „kocht" es plötzlich stark auf, um anschließend völlig aufzuhören: ^4He ist superfluid geworden. Wärme wird nahezu widerstandslos abgeleitet, die Wärmeleitfähigkeit steigt unterhalb des λ-Punktes um ~10^6 fache.

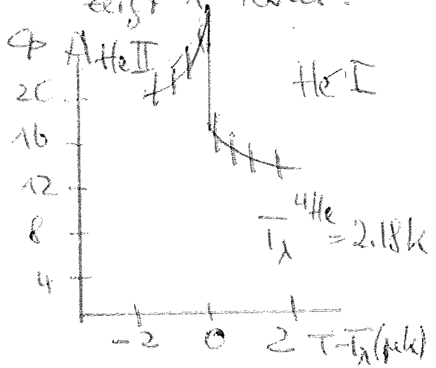
— Die Viskosität sinkt ebenfalls um das 10^6 fache — (Messung: Fluss durch Kapillare), P.L. Kapitza 1938

— ^4He kriecht als dünner Film Wände hoch

λ-Übergang:

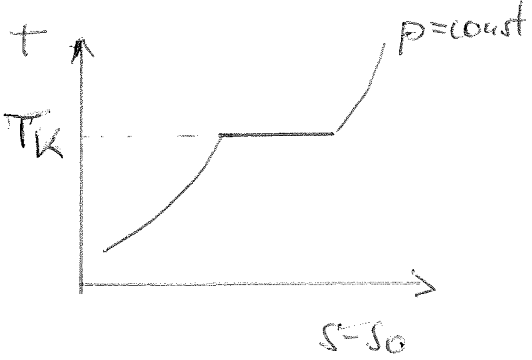
Phasenübergang 2. Ordnung: i.a. Knick im T-S-Diagramm; beim λ-Übergang: ⊥ Tangente

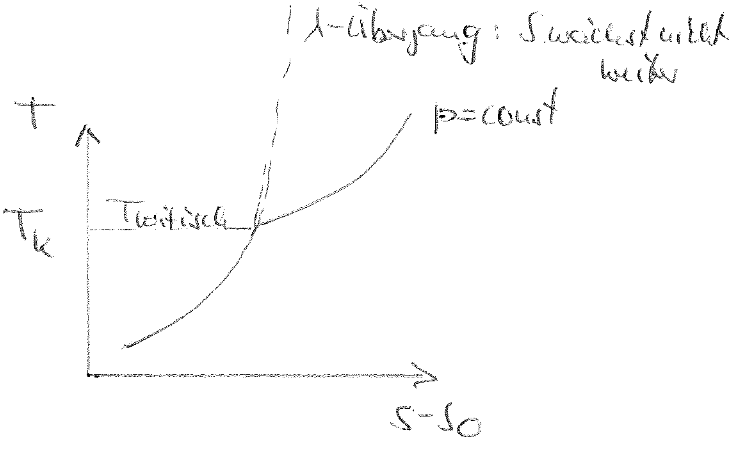
Die Wärmekapazität zeigt λ-Form:



Die Wärmekapazität divergiert am Phasenübergang.

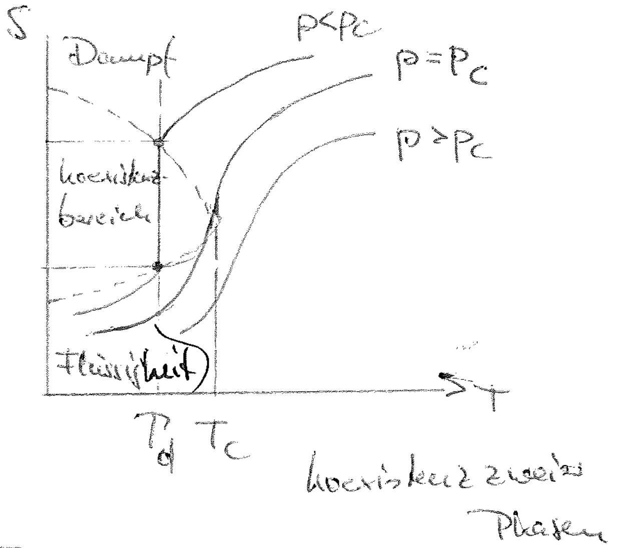
Demgegenüber sind Phasenübergänge 1. Ordnung durch einen Sprung in der Entropie S [und einer Divergenz der Wärmekapazität und der Kompressibilität] gekennzeichnet:





Phasenübergang 1. Ordnung:
zusätzliche Wärmeaufnahme während des Phasenübergangs
$\Delta Q = C\Delta T$, C = Wärmekapazität:
$C \to \infty$ am Phasenübergang.

2. Ordnung; beim λ-Übergang:
kein Knick, aber ∞ Ableitung



Die Fermi-Flüssigkeit ^3He wird ebenfalls suprafluid, jedoch erst bei $T \leq 10^{-3}\,K$;
die Hydrodynamik ist schwieriger als bei ^4He wegen des komplizierteren Ordnungsparameters. [Meist hat ^4He einen geringen Anteil $\sim 1{,}3\cdot 10^{-3}\,\%$ ^3He als „Verunreinigung"]

Die Hydrodynamik der suprafluiden Flüssigkeit kann auf der Basis der mikroskopischen Theorie (L. Tisza 1940, L.D. Landau 1941) entwickelt werden.

* Mikr. Theorie von He II (L. Landau 1941), L. Tisza 1940: makrosk. 2-Fluid-Modell → 2 Arten v. Schallwellen

$T_\lambda > T > 0$: He II verhält sich wie ein (Gemisch aus 2 Flüssigkeiten) 1) superfluid, ohne Viskosität
2) normal, viskos
} Es wird kein Impuls von 1 ↔ 2 übertragen: keine Reibung

genauer: ∃ gleichzeitig 2 Strömungen, die durch eine bestimmte eff. Masse charakterisiert sind: eine normal, die andere (wirklich) superfluid.
(Es handelt sich dabei nicht um die „Komponenten" eines „Gemisches".)

→ Kapillarströmung von He II: Im Spalt handelt es sich um die superfluide Strömung („die normale bleibt im Gefäß" und strömt mit normaler Viskosität durch den Spalt).

Rotierende Scheibe in He II: Erzeugt normale Strömung mit der dazugehörigen Viskosität (Messung d. Zähigkeit durch Dämpfung von Torsionsschwingungen ergibt normalen η-Wert).

Die superfluide Strömung transportiert keine Wärme. Sie ist stets eine Potentialströmung.
Die normale Strömung ist eine Strömung des „Gases der Elementaranregungen"; die Anregungen verhalten sich wie Quasiteilchen, die sich im Flüssigkeitsvolumen bewegen und bestimmte Impulse und Energien haben.

Die Entropie von He II wird durch die statistische Verteilung der Elementaranregungen bestimmt. Deshalb wird bei jeder Strömung, bei der das „Gas der Elementaranregungen" in Ruhe bleibt, keine Entropie übertragen: Eine superfluide Strömung verursacht keine Entropie-übertragung und keinen Wärmetransport → eine rein superfluide Strömung in He II ist thermodynamisch reversibel.

Mechanismus für den Wärmetransport in He II ist die Wärmeübertragung durch die normale Strömung der Flüssigkeit.
Jede Temperaturdifferenz ruft eine normale und eine superfluide innere Strömung hervor, sie können sich hinsichtlich ihrer Masse kompensieren, so dass kein realer Massentransport stattfinden muss.

Sei $\vec{v}_s$: Geschwindigkeit der superfluiden Transp. Strömung
$\vec{v}_n$: " " normalen

$\vec{v}_n \cdot \rho \cdot s$: Entropiestromdichte, s = Entropie pro Masseneinheit

$q = \rho \cdot T \cdot s \cdot \vec{v}_n =$ " $\cdot T$ = Wärmestromdichte

* Die superfluide Strömung ist eine Potentialströmung:

$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v}_s = 0}$ $\forall t$, im ganzen Volumen des Fluids

Die Elementaranregungen mit großer Wellenlänge (≙ kleinen Energien und Impulsen) sind Schallquanten (Phononen), und die makroskop. Hydrodynamik der superfluiden Strömung lässt keine anderen Schwingungen als Schallschwingungen zu.

Eine Potentialströmung übt keine Kraft auf einen stationär umströmten festen Körper aus ("d'Alembertsches Paradoxon")

In einer normalen Strömung hat ein Körper einen Widerstand.

Kompensieren sich normaler und superfluider Massenstrom, wirkt auf Körper im He II eine Kraft, obwohl kein resultierender Massentransport vorhanden ist.

10.2 Hydrodynamische Gleichungen für He II

Die hydrod. Strömung ist durch die 2 Geschwindigkeiten $\vec{v}_s$, $\vec{v}_n$ bestimmt

Gleichungen folgen aus der Galilei-Invarianz (nichtrel.) und den notwendigen Erhaltungssätzen.

Bei genügend großen Strömungsgeschw. verliert He II seine Superfluidität (Grenzgeschw., kritische Geschw.); dennoch die Gl. für beliebige Geschw. ableiten, dann zu kleinen v_s übergehen.

Massenstromdichte = Impuls pro Volumeneinheit:

$$\vec{j} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n$$

ρ_s : superfluide Dichte

ρ_n : normale "

$$\rho = \rho_s + \rho_n$$

$\rho_n \to 0$ für $T \to 0$ (in reinem ${}^4He$)

$\rho_s \to 0$ für $T \geq T_\lambda$ normales Fluid

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0$$

Kont. gl., Massenerhaltung

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung; Π_{ik} = Tensor der Impulsstromdichte

zunächst dissipative Prozesse vernachlässigen

⇒ reversible Strömung, Entropie bleibt erhalten

Entropiestrom $= \rho \cdot s \cdot \vec{v}_n$

↳ Entropieerhaltung:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho\cdot s\cdot \vec{v}_n\right) = 0$$

§ Bedingung für Potentialströmung im Anteil $\vec{v}_s$: $\vec{\nabla}\times\vec{v}_s = 0$

Ableitung von $\vec{v}_s$ = Gradient eines Skalars:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu\right) = 0 \quad \text{mit } \mu \text{ Skalar}^{(*)};$$

Π_{ik} und μ müssen noch festgelegt werden, aus dem Energieerhaltungssatz und der Galilei-Invarianz

↳ $$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{Q} = 0 \quad , \quad \vec{Q} = \text{Energiestromdichte}$$

(* μ wird mit dem chem. Potential zusammenfallen, s.u.)

Mit der Galilei-Transformation lässt sich die Abhängigkeit aller Größen von $\vec{v}_s$ bei fester Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_n - \vec{v}_s$ bestimmen (dazu neues Koord.-system einführen, in dem die Geschwindigkeit der superfluiden Strömung eines gegebenen Fluidelements 0 ist, und das sich mit v_s relativ zum ursprünglichen System bewegt)

$$\vec{j} = \rho\vec{v}_s + \vec{j}_0$$ 0: Größen im bewegten System

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \vec{j}_0\vec{v}_s + E_0$$

$$\vec{Q} = E\vec{v}_s + \frac{v_s^2}{2}\vec{j}_0 + \Pi_0 \vec{v}_s + \vec{Q}_0$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \Pi_{0ik}$$

$$dE_0 = \mu\, d\rho + T\, d(\rho s) + (\vec{v}_n - \vec{v}_s)\, d\vec{j}_0 \qquad \mu = \text{chem. Potential}$$
$$p = -E_0 + T\rho s + \mu\rho + \rho_n(\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2 \ \text{Druck} \qquad (\text{freie Enthalpie pro Masseneinheit})$$

∴ E, Q in Energieerhaltungssatz einsetzen, Zeitableitungen mit Hilfe der hydr. Gleichungen eliminieren (umfangreiche Rechnungen!) → … ⇝

$$\vec{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2}\right)\vec{j} + T\rho s \vec{v}_n + \rho_n \vec{v}_n\left[\vec{v}_n(\vec{v}_n - \vec{v}_s)\right]$$

$$\Pi_{ik} = \underbrace{\rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk}}_{} + p\,\delta_{ik}$$

$\rightarrow \rho v_i v_k$ in der üblichen Hydrodynamik

Damit ist das vollst. System der hydrodyn. Gleichungen definiert. Die Größen ρ_s, ρ_n, μ, s sind nicht nur Funktionen der thermodyn. Variablen p, T, sondern auch des Quadrates der Relativgeschwindigkeit der Strömungen $w^2 = (\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2$: Skalar, der gegenüber Galilei-Transformationen des Bezugssystems und Drehungen der gesamten Flüssigkeit invariant ist.

Die Gleichungen vereinfachen sich im phys. relevanten Fall nicht zu großer Geschwindigkeiten (Verhältnis von v_n, v_s zur Ausbreitungsgeschw. des zweiten Schalls): Abhängigkeiten von ρ_n, ρ_s von $\vec{w}$ vernachlässigen, übrige thermod. Größen nach Potenzen der Geschwindigkeit entwickeln. zB.:

$$s(p,T,\vec{w}) \approx s(p,T) + \frac{w^2}{2}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\rho_n}{\rho}$$
$$\rho(p,T,\vec{w}) \approx \rho(p,T) + \frac{\rho^2 w^2}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_n}{\rho}$$

+ Randbedingungen: An jeder festen ruhenden Oberfläche muss die dazu ⊥ Komponente des Massenstromes $\vec{j}$ verschwinden.

fixes man die Tangentialkomp. von $\vec{v}_n$ an der Wand verschwinden:

$$\vec{v}_{n\parallel} = 0 \text{ an der Wand}$$

$$\vec{v}_{n\perp} \text{ stetig " " "}$$

Für $\vec{v}_s$ übliche Randbed. für eine ideale, bei $\vec{v}_n$ für eine zähe Flüssigkeit.

Zur Berücksichtigung dissipativer Prozesse ist – wie in der gewöhnlichen Hydrodynamik – die Einführung zusätzlicher Terme erforderlich, die linear in den räuml. Ableitungen von $\vec{v}_n$ und T sind.

Dabei werden 5 unabhängige kinetische Koeffizienten ($\eta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \kappa$) eingeführt; die „erste Zähigkeit" η ist mit $\vec{v}_n$ verknüpft (analog η gewöhnl.)

κ ist analog zur Wärmeleitfähigkeit einer normalen Fluids.

Die „zweite Zähigkeit" ζ wird jetzt durch 3 Koeffizienten ersetzt.

10.3 Schallausbreitung in Superfluiden

- Strömungsgeschw. in der Schallwelle als klein voraussetzen
- ρ, p, s weichen nur wenig von ihren Gleichgewichtswerten ab

$\Rightarrow$ hydrod. Gleichungssystem durch Vernachlässigen quadrat. Glieder linearisieren:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \rho s \vec{\nabla}\vec{v}_n = 0 \quad (\rho s \text{ vor } \vec{\nabla} \text{ gezogen, da dieser Term schon } \vec{v}_n \text{ enthält})$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\Delta p$$

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \vec{\nabla}\mu = 0 \qquad \text{"} -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p}$$

Erste Gl. nach t differenzieren, in 3. einsetzen ⇒

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p}$$

und mit thermodyn. Identitäten folgt nach einigen

Umformungen

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T}$$

Diese Gl. beschreiben die Schallausbreitung im Superfluid.

Da es zwei Gleichungen gibt, folgen zwei Geschwindigkeiten der Schallausbreitung.

Für $\rho_s = 0$ (nur normales Fluid) bleibt nur die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$$

, während sich allgemein ergibt

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = 0$$

mit

$$\boxed{u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \ , \quad u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c \rho_n}}}$$

$c \simeq c_p \simeq c_V$ (doch c_V)

u_1: nahezu konstant

u_2: stark T-abhängig, verschwindet mit ρ_s am λ-Punkt.

"zweiter Schall"

Nahe am λ-Punkt lässt sich der Unterschied $c_p - c_v$ nicht vernachlässigen; es folgt

$$\boxed{u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c_p \rho}}}$$

Bei sehr niedrigen Temperaturen sind fast alle Elementaranregungen im Fluid Phononen, und es gilt

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT\rho}{3u_1^2}, \quad \rho_n \approx \rho \;\Rightarrow$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\cancel{T} s^2 \rho_s}{c^2 \cancel{T} \rho} \cdot 3u_1^2}$$

$$u_2 = \frac{s}{c} u_1 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3} u_1 \sqrt{3} = \frac{u_1}{\sqrt{3}}$$

$$T \to 0: \quad \boxed{u_2 \to \frac{u_1}{\sqrt{3}}}, \text{ d.h. } \boxed{\frac{u_1}{u_2} \xrightarrow[T \to 0]{} \sqrt{3}}$$

In einer Welle des zweiten Schalls schwingen normale und superfluide Flüssigkeit gegeneinander, der resultierende Massenstrom ist Null.

In einer Schallwelle des normalen (ersten) Typs ist $v_n \approx v_s$ (bei einer ebenen Welle), d.h. die Flüssigkeit in jedem Volumenelement schwingt als Ganzes, normale und superfluide Masse bewegen sich gemeinsam – entsprechend gewöhnlichen Schallwellen.

Strömungen von Superfluiden lassen sich nicht wie gewöhnliche Strömungen durch eine Reynoldszahl charakterisieren; vielmehr überwiegen die Strömungsgeschwindigkeiten, und die Theorien zur Turbulenzentstehung sind nicht mehr anwendbar.

Rotation ist nur durch Bildung von Wirbelschläuchen möglich, die eine quantisierte Zirkulation tragen; sie können in sich geschlossen sein. [siehe „Intermittent switching between Potential Flow and Turbulence in Superfluid He", M. Niemetz, H. Kerscher, W. Schoepe, cond-mat/0009299, PRL (2001)].

Testaufgaben zur

Hydrodynamik

WS 2012/13 HD

Aufgaben zur Hydrodynamik-VL

Aufg. 1: Kontinuitätsgleichung für die Entropie

Beweisen Sie mit Hilfe der Adiabatengleichung und der Kontinuitätsgleichung die "Kontinuitätsgleichung für die Entropie",

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\cdot s)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\cdot s\cdot\vec{v}) = 0}$$

Aufg. 2: Bestimmen Sie für die eindimensionale Schwingungsgleichung

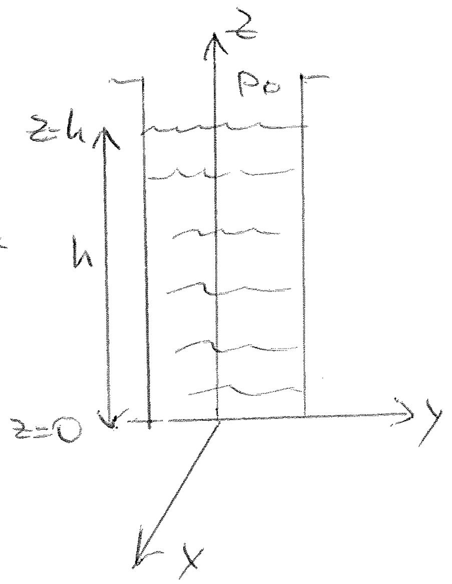
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

die d'Alembertsche Lösung (F_1, F_2 willkürliche reelle Funktionen)

$$p(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct).$$

Aufg. 3: Hydrostatik

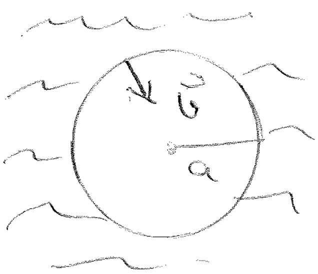
a) Bestimmen Sie für ein ruhendes inkompressibles Fluid in einem zylindrischen Gefäß aus der Euler-Gleichung im Schwerefeld $\boxed{\vec{\nabla} p = \rho\cdot g}$ den Druck (als Fkt der z-Koordinate), $p = p(z)$



b) Berechnen Sie das Druckprofil, wenn der Zylinder mit $\omega = \text{const}$ um die Vertikale rotiert.

(Hinweis: verwenden Sie das Zentrifugalpotential $U_r = -\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2$)

Aufg. 4: Inkompressible Fluide



Eine inkompressible Flüssigkeit füllt den Raum. Ein kugelförmiges Volumen mit Radius a wird entfernt.

Nach welcher Zeit hat sich der Hohlraum mit Flüssigkeit gefüllt?

Hinweis: Verwenden Sie die Euler-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ($\vec{\nabla}\vec{v}=0$) in sphärischen Koordinaten (das Problem ist kugelsymmetrisch!).

Aufg. 5: Wasserwellen

a) Berechnen Sie aus der Gleichung für das Geschwindigkeitspotential ϕ ($\vec{v}=-\vec{\nabla}\phi$),

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\cdot y$$

die Dispersionsrelation im tiefen ($h \gg \lambda$) und flachen ($h \ll \lambda$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ Wellenlänge) Wasser

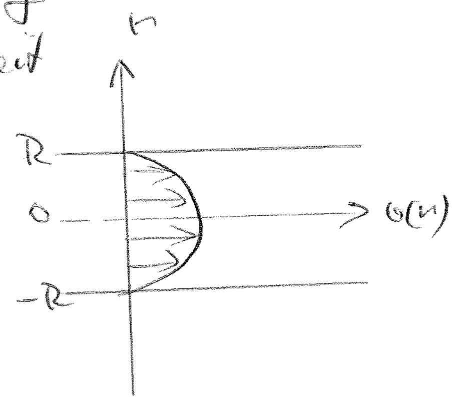
b) Berechnen Sie für Kapillarwellen mit der Oberflächenspannung σ aus der Potentialgleichung

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = 0$$

die (anomale) Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$.

Aufg. 6: Poiseuille-Strömung

a) Bestimmen Sie für die Rohrströmung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit aus der Navier-Stokes Gleichung



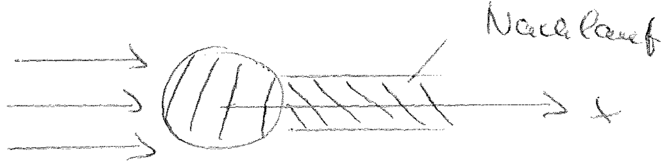
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$$

in linearer Näherung die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten ($\vec{v}(\vec{r}) \rightarrow v(r)$!).

b) Lösen Sie die Gleichung (Integration) für $v(r)$ für ein Rohr der Länge l mit dem Druckgefälle Δp. (Beachte die Randbedingungen: $v(r)=0$ für $r=\pm R$)

Aufg. 7: Laminarer Nachlauf

Eine zähe Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\vec{u}$ umströmt einen festen Körper. Die "wahre" Strömungsgeschwindigkeit sei $\vec{u}+\vec{v}$; für $\vec{v}=-\vec{u}$ Stillstand



a) Zeigen Sie, dass die Lösung im Nachlauf in Kugelkoordinaten

$$v_r(\Theta) = -\frac{F_r}{4\pi \cdot \rho \cdot \nu \cdot r} \exp\left\{-\frac{u \cdot r \cdot \Theta^2}{4\nu}\right\}$$

die Oseensche Gleichung erfüllt,

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} \quad \text{(d.h. Probe durch Einsetzen d. Lsg)}$$

b) Außerhalb des Nachlaufs ist die Strömung eine reine Potentialströmung. Lösen Sie hier die Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential, $\Delta\phi = 0$ ($\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$).

Aufg. 8: Stabilität stationärer Strömungen

Mit den Landauschen Konstanten $\alpha < 0$ und $\beta > 0$ lautet die Differentialgleichung für die Amplitude $A(t)$ einer kleinen, nicht stationären Störung der Bewegung einer zähen Fluids $(\gamma_1 \geq 0)$

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6$$

a) Lösen Sie die Gleichung für Glieder bis zur 4. Ordnung (Anm. $\beta \equiv 0$)

b) Wie lautet die Lösung der kompletten Gleichung für $t \to \infty$? (Probe durch Einsetzen)

Aufg. 9: Wärmeleitung

In einem unbegrenzten Medium gelte die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \qquad \text{(Temperatur } T\text{, Temperaturleitfähigkeit } \chi\text{)}$$

Berechnen Sie die Temperaturverteilung aus dem Fourierintegral

$$T(\vec{r},t) = \int T_0(\vec{r}\,') e^{-k^2 \chi t} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} d^3x' \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

für eine anfängliche Temperaturverteilung $T_0(\vec{r}) = \text{const}\,\delta(\vec{r})$ und ein 1dim. Problem $[T(\vec{r},t) \to T(r,t)]$

Hinweis: $\vec{k}$-Integration zuerst ausführen, dann d^3x!

Mit $e^{i\vec{k}\vec{R}} = \cos(\vec{k}\vec{R}) + i\sin(\vec{k}\vec{R})$

verschwindet das Integral über die ungerade sin-Funktion,

und es ist (ξ = eine Komponente des Vektors $\vec{k}$)

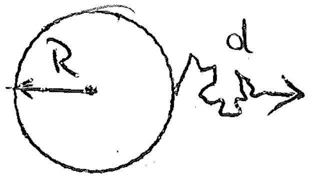
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2}\cos(\beta\xi)\,d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/(4\alpha)}$$

[Lösung siehe VL-Skript H100:

$$T(r,t) = \text{const} \cdot \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\, e^{-r^2/(4\chi t)}$$]

Aufg. 10: Diffusion

Welche Zeit τ benötigt ein – in einem Fluid suspendiertes – Brownsches Teilchen, um eine Distanz $d \simeq 2R$ durch Diffusion zurückzulegen?



$$\langle r^2\rangle = 6Dt \Rightarrow \tau = \frac{d^2}{6D}$$

Einstein-Relation

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta d} \Rightarrow \underline{\tau = \frac{\pi\eta d^3}{kT}}$$

Aufg. 11: Energie-Impuls Tensor

Berechnen Sie den Energie-Impuls Tensor

$$T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$$

mit $w = \varepsilon + p$ = Enthalpie pro Volumeneinheit,
ε = innere Energiedichte, p = Druck,
u^α = Vierergeschwindigkeit, $g^{\alpha\beta}$ = metrischer Tensor

im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$

(Beachte: Im relativistischen Fall wird die Teilchenzahldichte n auf die Einheit des Ruhevolumens bezogen; die Energiedichte ist dann $m \cdot n \cdot c^2$. Im nichtrelativistischen Fall wird dagegen die Energiedichte auf die Volumeneinheit im Laborsystem bezogen, in dem sich das Fluid bewegt. Beim n.r. Grenzübergang wird deshalb ersetzt

$$m \cdot n \cdot c^2 \xrightarrow{\text{n.r.}} \rho c^2 - \frac{\rho v^2}{2}$$, siehe Skript.)

Aufg. 12: Entropieerhaltung in relativistischer Hydrodynamik

Die Bewegung idealer relativistischer Fluide verläuft adiabatisch, die auf die Einheit des Ruhevolumens bezogene Entropie s ändert sich nicht:

$$u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{s}{n}\right) = 0 \qquad u^\beta = \left(\gamma, \gamma \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right) \text{ 4er Geschw.}$$

n = skalare Teilchendichte.

Zeigen Sie: Daraus folgt die Erhaltung der Viererdivergenz des Entropiestromes $s u^\beta$,

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(s u^\beta\right) = 0.$$

^

Hydrodynamik: Literatur

WS 2012/13 HD G. Wolschin

D.J.Tritton: Physical Fluid Dynamics, Oxford Univ. Press(1977)

L.D.Landau, E.M.Lifschitz: TPVI- Hydrodynamik (1991)

D.J.Acheson: Elementary fluid dynamics, Clarendon (1990)

T.E.Faber: Fluid dynamics for physicists, CUP (1995)

G. Wolschin: Diffusion and local deconfinement in relativistic systems, Phys. Rev. C 69, 024906 (2004)

W.Greiner,H.Stock: TP2A-Hydrodynamik, H.Deutsch (1987)

C.Godreche (ed.): Hydrodynamics and nonlinear instabilities, CUP (1998)

A.Sommerfeld: TPII, Mechanik der deformierbaren Medien (1947)

A.R.Choudhuri: The Physics of Fluids and Plasmas (1998)

R.Lüst: Hydrodynamik (1978)

H.L.Swinney (ed): Hydrodynamic Instabilities and the Transition to turbulence

S.N.Shore: An introduction to astrophysical Hydrodynamics (1992)

D. Michalas: Stellar Atmospheres, Freeman

F.H.Shu: The physics of astrophysics, Vol.II, Univ. Science books

Vorlesung Montags 9.15 - 11.00 Philosophenweg 12 gHS.

NEW return